O Teorema de Stokes: Uma demonstração em cadeias

Marcelo dos Santos

2013

Sumário

Capítulo 1

O Teorema de Stokes

Este artigo é fruto de parte de minha monografia de graduação. Aqui, vamos abordar e demonstrar os Teoremas Clássicos do Cálculo de uma forma diferente, iremos utilizar os conhecimentos de formas diferencias e o conceito n-cadeias para enunciar e demonstrar o Teorema de Stokes. Em seguida utilizar esta ferramenta para demonstrar de uma forma simples e rápidas os Teoremas de Green e Gauss.

1.1 n-Cadeias

Definição 1.1.1 *Seja* $[0,1]^n = [0,1] \times \cdots \times [0,1]$ *e* $A \subset \mathbb{R}^n$*. Dizemos que uma função contínua* $f : [0,1]^n \to A$ *define um cubo singular de dimensão* n *em* A*.*

Sendo $I^n(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a função identidade, esta define o cubo singular de dimensão n conhecido como cubo unitário n-dimensional.

Definição 1.1.2 *Sejam* $C_1, \cdots, C_k : [0,1]^n \to A$*, cubos singulares n-dimensionais. Para* $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{Z}$ *a soma* $\alpha_1 C_1 + \cdots + \alpha_k C_k$ *é chamada uma n-cadeia em* A*.*

Em particular o cubo singular C de dimensão n é considerado como sendo a n-cadeia $1 \cdot C$.

Definição 1.1.3 *Para cada* $i, 1 \leq i \leq n$*, definimos os cubos singulares* $I^n_{(i,0)}$ *e* $I^n_{(i,1)}$*, ambos de dimensão* $n-1$ *pondo para cada* $x \in [0,1]^{n-1}$

$$\begin{aligned} I^n_{(i,0)}(x) &= I^n(x_1, \cdots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \cdots, x_n) \\ &= (x_1, \cdots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \cdots, x_n) \quad e \\ I^n_{(i,1)}(x) &= I^n(x_1, \cdots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \cdots, x_n) \\ &= (x_1, \cdots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \cdots, x_n). \end{aligned}$$

$I^n_{(i,0)}$ e $I^n_{(i,1)}$ são chamados, respectivamente, de faces $(i,0)$ e $(i,1)$ do cubo I^n.

Definição 1.1.4 *Para cada n-cadeia singular C em A, definimos a fronteira de C, denotada por ∂C, como sendo uma (n-1)-cadeia.*

Definição 1.1.5 *Definimos a fronteira de um cubo unitário n-dimensional por*

$$\partial I^n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} I^n_{(i,\alpha)}.$$

Por exemplo, a fronteira de I^2 pode ser definida como a soma de quatro cubos singulares unidimensionais, ordenados ao redor da fronteira de $[0,1]^2$ no sentido anti-horário, ou seja,

$$\partial I^2 = I^2_{(2,0)} + I^2_{(1,1)} - I^2_{(2,1)} - I^2_{(1,0)} = \sum_{i=1}^{2} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} I^2_{(i,\alpha)}.$$

Definição 1.1.6 *Para um cubo singular de dimensão n qualquer $C : [0,1]^n \to A$, definimos a face (i,α) de C por*

$$C_{(i,\alpha)} = C \circ (I^n_{(i,\alpha)})$$

e

$$\partial C = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} C_{(i,\alpha)}.$$

Finalmente, definimos a fronteira de uma n-cadeia $\sum a_i C_i$ por

$$\partial(\sum a_i C_i) = \sum a_i \partial(C_i)$$

Teorema 1.1.7 *Para qualquer n-cadeia $C = \sum a_k C_k$ em A, se verifica a identidade $\partial(\partial C) = 0$, ou seja, $\partial^2 C = 0$.*

Demonstração . Consideremos $(I^n_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)}$, para $i \leq j$. Sendo $x \in [0,1]^{n-2}$ temos

$$\begin{aligned}
(I^n_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)}(x) &= I^n_{(i,\alpha)}(I^{n-1}_{(j,\beta)}(x)) \\
&= I^n_{(i,\alpha)}(x_1, \cdots, x_{j-1}, \beta, x_{j+1}, \cdots, x_{n-1}) \\
&= I^n(x_1, \cdots, x_{i-1}, \alpha, x_{i+1}, \cdots, x_{j-1}, \beta, x_{j+1}, \cdots, x_{n-1}).
\end{aligned}$$

De forma análoga, temos

$$\begin{aligned}
(I^n_{(j+1,\beta)})_{(i,\alpha)}(x) &= I^n_{(j+1,\beta)}(I^{n-1}_{(i,\alpha)}(x)) \\
&= I^n_{(j+1,\beta)}(x_1, \cdots, x_{i-1}, \alpha, x_{i+1}, \cdots, x_{n-1}) \\
&= I^n(x_1, \cdots, x_{i-1}, \alpha, x_{i+1}, \cdots, x_{j-1}, \beta, x_{j+1}, \cdots, x_{n-1}).
\end{aligned}$$

Onde concluimos que $(I^n_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)} = (I^n_{(j+1,\beta)})_{(i,\alpha)}$, para $i \leq j$.

Desde que para qualquer cubo n-dimensional $C_{(i,\alpha)} = C \circ (I^n_{(i,\alpha)})$, temos também

$$\begin{aligned}
(C_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)} &= (C_{(i,\alpha)}) \circ (I^{n-1}_{(j,\beta)}) \\
&= (C \circ (I^n_{(i,\alpha)})) \circ (I^{n-1}_{(j,\beta)}) \\
&= C \circ (I^n_{(i,\alpha)}(I^{n-1}_{(j,\beta)})) \\
&= C \circ (I^n_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)} \\
&= C \circ (I^n_{(j+1,\beta)})_{(i,\alpha)} \\
&= C \circ (I^n_{(j+1,\beta)}(I^{n-1}_{(i,\alpha)})) \\
&= (C \circ (I^n_{(j+1,\beta)})) \circ (I^{n-1}_{(i,\alpha)}) \\
&= (C_{(j+1,\beta)}) \circ (I^{n-1}_{(i,\alpha)}) \\
&= (C_{(j+1,\beta)})_{(i,\alpha)}
\end{aligned}$$

para $i \leq j$. Segue-se que

$$\begin{aligned}
\partial^2 C &= \partial \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} C_{(i,\alpha)} \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{\beta=0,1} (-1)^{i+\alpha+\beta+j} (C_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{i+j} \left[(C_{(i,0)})_{(j,0)} - (C_{(i,0)})_{(j,1)} - (C_{(i,1)})_{(j,0)} + (C_{(i,1)})_{(j,1)} \right]
\end{aligned}$$

e fazendo $\sigma_{ij} = (-1)^{i+j} \left[(C_{(i,0)})_{(j,0)} - (C_{(i,0)})_{(j,1)} - (C_{(i,1)})_{(j,0)} + (C_{(i,1)})_{(j,1)} \right]$ temos para $i \leq j$.

$$\begin{aligned}
\sigma_{(j+1)i} &= (-1)^{i+j+1} \left[(C_{(j+1,0)})_{(i,0)} - (C_{(j+1,0)})_{(i,1)} - (C_{(j+1,1)})_{(i,0)} + (C_{(j+1,1)})_{(i,1)} \right] \\
&= (-1)^{i+j+1} \left[(C_{(i,0)})_{(j,0)} - (C_{(i,1)})_{(j,0)} - (C_{(i,0)})_{(j,1)} + (C_{(i,1)})_{(j,1)} \right] \\
&= -\sigma_{ij}.
\end{aligned}$$

Sendo assim

$$\partial^2 C = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n-1} \sigma_{ij}$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{n-1} \sigma_{1j} + \sum_{i=2}^{n} \sigma_{i1} \right] + \left[\sum_{j=2}^{n-1} \sigma_{2j} + \sum_{i=3}^{n} \sigma_{i2} \right] + \cdots + \left[\sum_{j=n-1}^{n-1} \sigma_{(n-1)j} + \sum_{i=n}^{n} \sigma_{i(n-1)} \right]$$

$$= \left[-\sum_{j=1}^{n-1}\sigma_{(j+1)1} + \sum_{i=2}^{n}\sigma_{i1}\right] + \left[-\sum_{j=2}^{n-1}\sigma_{(j+1)2} + \sum_{i=3}^{n}\sigma_{i2}\right] + \cdots + \left[-\sum_{j=n-1}^{n-1}\sigma_{(j+1)(n-1)} + \sum_{i=n}^{n}\sigma_{i(n-1)}\right]$$
$$= 0$$

Sendo o teorema válido para qualquer cubo singular n-dimensional, ele é válido para qualquer n-cadeia singular. ■

1.2 Integração em cadeias

O fato de termos tanto $d^2 = 0$ como $\partial^2 = 0$, além da semelhança simbólica, determina uma conexão entre cadeias e formas. Tal conexão se estabelece ao integrarmos formas sobre cadeias. No que segue consideraremos apenas cubos n-dimensionais singulares diferenciáveis.

Definição 1.2.1 *Sendo w uma forma k-dimensional em $[0,1]^k$, existe uma única função f que satisfaz $w = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$. Definimos*

$$\int_{[0,1]^k} w = \int_{[0,1]^k} f(x_1, \cdots, x_k) dx_1 . \cdots . dx_k.$$

Definição 1.2.2 *Sendo w uma forma k-dimensional sobre A e C um cubo singular k-dimensional, em A, definimos*

$$\int_C w = \int_{[0,1]^k} C^* w.$$

Definição 1.2.3 *Sendo w uma forma k-dimensional sobre A e $C = \sum a_i C_i$ uma cadeia singular k-dimensional, em A, definimos*

$$\int_C w = \sum a_i \int_{C_i} w.$$

1.3 O elemento de volume

Definição 1.3.1 *Seja M uma superfície no $\mathbb{R}^n$, com fronteira, k-dimensinal, munida da orientação η. O elemento de volume de M é a forma diferencial w de grau $k-1$, definida pondo-se para cada $x \in M$, $w(x) \in \wedge^k (T_x M)^*$ denotado por dV.*

Definição 1.3.2 *Sendo M compacta no $\mathbb{R}^n$ definimos o volume de M como sendo*

$$\int_M dV.$$

Para superfícies unidimensionais ou bidimensionais, o termo volume é geralmente substituido por comprimento ou área, empregando no lugar de dV, ds para o elemento de comprimento e dA ou dS para o elemento de área.

Definição 1.3.3 *Seja $M \subseteq \mathbb{R}^3$ uma superfície tridimensional, e seja $\eta(x)$ a normal exterior unitária em $x \in M$. Definimos $w \in \wedge^2 T_xM$ por*

$$w(v,u) = \begin{vmatrix} v \\ u \\ \eta(x) \end{vmatrix} = \langle v \times u, \eta(x) \rangle = dA(v,u)$$

Em particular, $w(v,u) = 1$ quando v, u compuserem uma base ortonormal de T_xM. Se $v \times u$ for um múltiplo de $\eta(x)$ teremos

$$dA(v,u) = |v \times u|$$

Teorema 1.3.4 *Seja M uma superfície orientada com ou sem fronteira, no $\mathbb{R}^3$. Sendo η a sua normal unitária exterior, temos que*

$$dA = \eta_1 dy \wedge dz + \eta_2 dz \wedge dx + \eta_3 dx \wedge dy \qquad (1)$$

Além disto, são válidos em M as relações

$$\eta_1 dA = dy \wedge dz \qquad (2)$$

$$\eta_2 dA = dz \wedge dx \qquad (3)$$

$$\eta_3 dA = dx \wedge dy \qquad (4).$$

Demonstração . Sendo $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3), v = (v_1, v_2, v_3)$ e $u = (u_1, u_2, u_3)$ temos que relação (1) equivale a

$$dA(v,u) = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ \eta_1(x) & \eta_2(x) & \eta_3(x) \end{vmatrix}$$

Para demonstrarmos as outras relações, tomemos $z \in T_x\mathbb{R}^3$. Sendo $v \times u = \alpha\eta(x)$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}$, temos então

$$\begin{aligned} \langle z, \eta(x) \rangle \cdot \langle v \times u, \eta(x) \rangle &= \langle z, \eta(x) \rangle \alpha \\ &= \langle z, \alpha\eta(x) \rangle = \langle z, v \times u \rangle \end{aligned}$$

Tomando agora sucessivamente $z = e_1, e_2, e_3$ obtemos

$$\langle e_1, \eta(x) \rangle \cdot \langle v \times u, \eta(x) \rangle = \langle e_1, v \times u \rangle$$

então

$$\eta_1 dA(v,u) = \langle e_1, v \times u \rangle = v_2 u_3 - u_2 v_3$$

por outro lado

$$\begin{aligned} dy \wedge dz(v,u) &= \begin{vmatrix} dy(v) & dy(u) \\ dz(v) & dz(u) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} v_2 & u_2 \\ v_3 & u_3 \end{vmatrix} \\ &= v_2u_3 - u_2v_3 \end{aligned}$$

comparando com $\eta_1 dA(v,u)$ obtemos

$$\eta_1 dA = dy \wedge dz$$

de forma análoga, fazendo $z = e_2, e_3$ obtemos

$$\eta_2 dA = dz \wedge dx$$

$$\eta_3 dA = dx \wedge dy$$

respectivamente.

1.4 O teorema de Stokes

Finalmente estamos em condições de sintetizar a relação entre formas, cadeias, d e ∂. Esta relação fica bem determinada no enunciado do teorema a seguir conhecido como teorema de Stokes:

Teorema 1.4.1 *(Stokes) Dado um aberto A de $\mathbb{R}^n$, sejam w uma forma de dimensão $k-1$ e C uma cadeia k-dimensional, ambas sobre A. Temos*

$$\int_C dw = \int_{\partial C} w$$

Demonstração . Pela definição de integral e pelo teorema **??** temos

$$\int_c dw = \int_{[0,1]^k} c^* dw = \int_{[0,1]^k} dc^* w$$

Uma vez que c^*w é uma $k-1$-forma em $[0,1]^k$ pode ser escrita como

$$c^*w = \sum_{i=1}^{k} g_i dt_1 dt_2 \cdots \hat{dt_i} \cdots dt_k$$

Para determinadas funções $g_1, g_2, \cdots, g_k$ definidas em $[0,1]^k$. Por isso

$$\int_c dw = \sum_{i=1}^{k} \int_{[0,1]^k} d(g_i dt_1 dt_2 \cdots \hat{dt_i} \cdots dt_k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \int_{[0,1]^k} \frac{\partial g_i}{\partial t_i} dt_1 dt_2 \cdots dt_k.$$

Alterando a ordem de integração e, posteriormente, aplicar o teorema fundamental do cálculo em uma variável, temos

$$\int_{[0,1]^k} \frac{\partial g_i}{\partial t_i} dt_1 dt_2 \cdots dt_k = \int_{[0,1]^k} \frac{\partial g_i}{\partial t_i} dt_i dt_1 dt_2 \cdots \hat{dt_i} \cdots dt_k$$

$$= \int_{[0,1]^{k-1}} (g_i(t_1, \cdots, t_{i-1}, 1, t_{i+1}, \cdots, t_k) - g_i(t_1, \cdots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \cdots, t_k)) dt_1 dt_2 \cdots \hat{dt_i} \cdots dt_k$$

as fórmulas

$$g_i(t_1, \cdots, t_{i-1}, 1, t_{i+1}, \cdots, t_k) dt_1 dt_2 \cdots \hat{dt_i} \cdots dt_k$$

e

$$g_i(t_1, \cdots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \cdots, t_k) dt_1 dt_2 \cdots \hat{dt_i} \cdots dt_k$$

nada mais são que $c^*_{(i,1)} w$, $c^*_{(i,0)} w$ respectivamente. Assim,

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_c dw &= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \int_{[0,1]^k} \frac{\partial g_i}{\partial t_i} dt_i dt_1 dt_2 \cdots \hat{dt_i} \cdots dt_k \\
&= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \int_{[0,1]^{k-1}} (c^*_{(i,1)} w - c^*_{(i,0)} w) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \sum_{\rho=0,1} (-1)^{i+\rho} \int_{[0,1]^{k-1}} c^*_{(i,\rho)} w \\
&= \sum_{i=1}^{k} \sum_{\rho=0,1} (-1)^{i+\rho} \int_{c_{(i,\rho)}} w = \int_{\partial c} w,
\end{aligned}$$

o que comprova o resultado.

1.4.1 Os Teoremas Clássicos a partir de Stokes

Temos agora a disposição todo o instrumento necessário para enunciar e demonstrar os teoremas clássicos do tipo Stokes.

Teorema 1.4.2 *(Green) Seja A um aberto do $\mathbb{R}^2$ com fronteira. Para quaisquer funções diferenciáveis $\alpha, \beta : A \to \mathbb{R}$ se tem*

$$\int_{\partial A} \alpha dx + \beta dy = \int \int_A \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}\right) dx dy$$

Demonstração . Observemos que

$$\begin{aligned} d(\alpha dx + \beta dy) &= d(\alpha dx) + d(\beta dy) \\ &= (\frac{\partial \alpha}{\partial x}dx + \frac{\partial \alpha}{y}dy) \wedge dx + (\frac{\partial \beta}{\partial x}dx + \frac{\partial \beta}{y}dy) \wedge dy \\ &= \frac{\partial \alpha}{\partial y}dy \wedge dx + \frac{\partial \beta}{\partial x}dx \wedge dy \\ &= (\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y})dx \wedge dy \end{aligned}$$

Aplicando o teorema 1.4.1 temos

$$\int\int_A (\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y})dxdy = \int_{\partial A} \alpha dx + \beta dy$$

■

Teorema 1.4.3 *(Gauss) Seja $S \subseteq \mathbb{R}^3$ uma superficie tridimensional com fronteira, e seja η a normal unitária exterior a ∂S. Para um campo vetorial $F(x, y, z)$ definido em S, temos:*

$$\int_{\partial S} F \cdot \eta dS = \int_S divF dxdydz$$

Demonstração . Pelo teorema 1.3.4 observamos que a igualdade acima pode ser expressa como:

$$\int_{\partial S} F_1 dydz + F_2 dzdx + F_3 dxdy = \int_S (\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z})dxdydz$$

então definimos em S, $w = F_1 dydz + F_2 dzdx + F_3 dxdy$ e calculemos $d(w)$

$$\begin{aligned} d(w) &= d(F_1 dydz + F_2 dzdx + F_3 dxdy) = d(F_1)dydz + d(F_2)dzdx + d(F_3)dxdy \\ &= (\frac{\partial F_1}{\partial x}dx + \frac{\partial F_1}{\partial y}dy + \frac{\partial F_1}{\partial z}dz)dydz + (\frac{\partial F_2}{\partial x}dx + \frac{\partial F_2}{\partial y}dy + \frac{\partial F_2}{\partial z}dz)dzdx \\ &+ (\frac{\partial F_3}{\partial x}dx + \frac{\partial F_3}{\partial y}dy + \frac{\partial F_3}{\partial z}dz)dxdy \\ &= \frac{\partial F_1}{\partial x}dxdydz + \frac{\partial F_2}{\partial y}dydzdx + \frac{\partial F_3}{\partial z}dzdxdy \\ &= (\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z})dxdydz \end{aligned}$$

aqui utilizamos o fato de que $dx_i \wedge dx_j = -\mathrm{dx}_j \wedge dx_i$ e $\mathrm{dx}_i \wedge dx_i = 0$. Asssim basta aplicar o teorema 1.4.1 concluimos que

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} F_1 dydz + F_2 dzdx + F_3 dxdy &= \int_S dw = \int_{\partial S} w \\ &= \int_S (\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z})dxdydz \end{aligned}$$

Portanto segue o resultado.

Teorema 1.4.4 *(Stokes) Seja M uma superfície contida no $\mathbb{R}^3$, seja η a normal unitária exterior a M. Dado um campo vetorial T em ∂M para o qual $ds(T) = 1$ e um campo vetorial arbitrário em um aberto que contém M, se tem*

$$\int_M rotF \cdot \eta dA = \int_{\partial M} F \cdot T ds$$

Demonstração . Definimos w em M por $w = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$. Como as componentes de $rotF$ são

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

utilizando os mesmos passos na demonstração do teorema 1.4.3, deduz ser válida em M

$$\begin{aligned} rotF \cdot \eta dA &= (\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}) dy \wedge dz \\ &+ (\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}) dz \wedge dx \\ &+ (\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}) dx \wedge dy \\ &= dw \end{aligned}$$

Por outro, uma vez que $ds(T) = 1$, são válidas em ∂M

$$T_1 ds = dx$$

$$T_2 ds = dy$$

$$T_3 ds = dz$$

então se verifica em ∂M que

$$\begin{aligned} F \cdot T ds &= F_1 T_1 ds + F_2 T_2 ds + F_3 T_3 ds \\ &= F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz \\ &= w \end{aligned}$$

Logo aplicando o teorema 1.4.1 concluimos que

$$\begin{aligned} \int_M rotF \cdot \eta dA &= \int_M dw \\ &= \int_{\partial M} w \\ &= \int_{\partial M} F \cdot T ds \end{aligned}$$

Considerações Finais

Esse trabalho apresentou os conceitos de n-cadeias ficando claro que a sua aplicação facilita sobremaneira a interpretação e representação de certos fenômenos que são difícilmente compreendidos e representados usando-se a abordagem vetorial clássica. Finalmente apresentou-se uma aplicação do teorema de Stokes, para redemonstrar os teoremas clássicos de uma forma mais precisa e elegante.

Referências Bibliográficas

[1] SPIVAK, Michael. **Cálculo em Variedades**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2003

[2] LIMA, Elon Lages. **Análise Real**, Rio de Janeiro v.2 2004

[3] _____, _____. **Álgebra exterior**, Rio de janeiro: IMPA,(Coleção Matemática Universitária)2005

[4] _____, _____. **Análise Vetorial**. Rio de Janeiro: IMPA,(Coleção Matemática Universitária), v.3, 2007

[5] COUTINHO, Severino Collier. **Cálculo vetorial com formas diferenciais**. Disponível em: $\langle http://www.dcc.ufrj.br/\ collier/e-books/formas.pdf\rangle$ acesso em 08 de setembro de 2010.

[6] MENDES, Cláudio Martins. **Notas de aula: Cálculo vetorial**. Disponível em: $\langle http://www.icmc.sc.usp.br/\ cmmendes/CalculoII/Calculo2Vetorial.pdf\rangle$, acesso em 08 de setembro de 2010.

[7] ÁVILA, Geraldo Severo de Sousa. **Cálculo 3: funções de várias variáveis**, 3.ed.Rio de Janeiro : LTC - Livros Técnicos e Cientificos Editora S.A. , 1983

[8] COELHO, Flávio Ulhoa. LOERENÇO, Mary Lilian. **Um curso de álgebra linear**. 2.ed. São Paulo. Editora da Universidade de Saõ Paulo, 2007.

[9] HSU, Hwei P. **Análise vetorial**, Tradutor Edgard Pedreira de Cerqueira Neto. Rio de Janeiro, Livros Técicos e Cientifícos, 1972.

[10] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**. v.3. 3ed

[11] KAPLAN, Wilfred. **Cálculo avançado**. v.1