



Universidade Federal do Rio de Janeiro

Instituto de Matemática

Licenciatura em Matemática

Software livre e Matemática: Opções de pesquisa e ensino

Ricardo Jurczyk Pinheiro

Orientador: Ricardo da Silva Kubrusly

Monografia apresentada ao Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

À Maria Cláudia, minha querida esposa.

Agradecimentos

1. A Deus, em primeiro lugar. Sem Ele, nada seria possível. Obrigado, Senhor.
2. Aos meus pais, Sergio e Madalena, pelo apoio e a força, em momentos fáceis e difíceis.
3. Ao professor Ricardo Kubrusly, um professor, um mestre e um amigo, alguém que participou ativamente do conjunto de influências que me levaram a me apaixonar pelo ensino, e pela matemática.
4. Aos professores Ângela Rocha e Marco Aurélio Cabral, que aceitaram o convite para compor a banca examinadora.
5. A pessoas que não conheço pessoalmente, como Linus Torvalds, Mark Shuttleworth, Matthias Ettrich, e tantos outros desenvolvedores ao redor do mundo, anônimos ou não, que dedicam parte do seu tempo a desenvolver software livre, como o GNU/Linux, o LyX e tantos outros programas. Viva o software livre!

Resumo

Este trabalho traz uma observação sobre o movimento crescente do Software Livre, representado principalmente pelo sistema operacional GNU/Linux, e sua interdisciplinaridade com a Matemática. O objetivo desse trabalho é catalogar e indicar software preferencialmente livre para uso em pesquisa com matemática.

Sumário

1	Software livre: Uma breve história	11
1.1	No princípio era o Unix...	11
1.2	O projeto GNU	12
1.2.1	Software livre: Definição	13
1.2.2	GNU is not Unix	13
1.3	Entra o Linux	14
1.3.1	As distribuições Linux	15
1.3.2	Uma distribuição em particular: O Ubuntu	16
1.3.3	Crescimento no desktop	17
1.4	Software de pesquisa em Matemática: O que temos?	18
1.5	Objetivo desse trabalho	18
2	Álgebra	19
2.1	Álgebra Computacional	19
2.1.1	Aldor	19
2.1.2	Axiom	19
2.1.3	DCAS	19
2.1.4	Eigenmath	19
2.1.5	Fermat	19
2.1.6	FriCAS	20
2.1.7	Giac/xcas	20
2.1.8	Magma	20
2.1.9	Maple	21
2.1.10	MathEclipse	21
2.1.11	Mathemagix	21
2.1.12	Mathematica	22
2.1.13	Mathomatic	22
2.1.14	Maxima	22
2.1.15	MuPAD	23
2.1.16	Números primos de Mersenne e o projeto GIMPS	23
2.1.17	OpenAxiom	24
2.1.18	PARI/GP	24
2.1.19	Qalculate!	24
2.1.20	REDUCE	24
2.1.21	SAGE	25
2.1.22	TRIP	25
2.1.23	Yacas	25

2.2	Álgebra comutativa e teoria dos grupos	25
2.2.1	Bergman	25
2.2.2	Cadabra	26
2.2.3	CoCoA	26
2.2.4	DoCon	26
2.2.5	GAP	26
2.2.6	JAS	27
2.2.7	KASH/KANT	27
2.2.8	Macaulay2	28
2.2.9	Magnus	28
2.2.10	Singular/PLURAL	28
2.3	Álgebra linear e análise numérica	28
2.3.1	MATLAB	28
2.3.2	Euler	29
2.3.3	FreeMat	29
2.3.4	NA Worksheet	29
2.3.5	Octave	29
2.3.6	Scilab	30
3	Geometria e visualização	31
3.1	Geometria fractal	31
3.1.1	Endlos	31
3.1.2	Fractint	32
3.1.3	EyeFract e GLFract	32
3.1.4	Fyre	32
3.1.5	Glito	32
3.1.6	GnoFract 4D	33
3.1.7	XaoS	33
3.2	Geometria Computacional	33
3.2.1	Archimedes Geo3D	34
3.2.2	Axel	34
3.2.3	C. a R.	34
3.2.4	Cinderella	36
3.2.5	Dr. Geo	36
3.2.6	Eukleides	36
3.2.7	Gambol	37
3.2.8	Geogebra	37
3.2.9	Geometry Expressions	37
3.2.10	Geomview	39
3.2.11	Geoproof	39
3.2.12	GEX	40
3.2.13	iGeom	40
3.2.14	Kaleido	40
3.2.15	Kig	40
3.2.16	KSEG	40
3.2.17	OpenEuclide	41
3.3	Visualização e plotagem	41

3.3.1	Easy Funktion	41
3.3.2	Fplot	41
3.3.3	Gnuplot	42
3.3.4	Grace	42
3.3.5	KAlgebra	42
3.3.6	KmPlot	43
3.3.7	LabPlot	43
3.3.8	MayaVi2	44
3.3.9	Octaviz	44
3.3.10	OpenDX	44
3.3.11	QtPlot	44
4	Bibliotecas de programação e outros	46
4.1	Bibliotecas de programação	46
4.1.1	Álgebra Computacional	46
4.1.1.1	GiNaC	46
4.1.1.2	JACAL	46
4.1.1.3	LiDIA	46
4.1.1.4	NZMATH	47
4.1.1.5	SymbolicC++	47
4.1.1.6	SYMMETRICA	47
4.1.1.7	SymPy	47
4.1.1.8	SympyCore	48
4.1.2	Álgebra Linear e Análise Numérica	48
4.1.2.1	AMD Core Math Library	48
4.1.2.2	ATLAS	48
4.1.2.3	BLAS	48
4.1.2.4	EISPACK	49
4.1.2.5	Intel Math Kernel Library	49
4.1.2.6	LAPACK	49
4.1.2.7	LINPACK	50
4.1.2.8	MINPACK	51
4.1.2.9	PDL	51
4.1.2.10	PetSc	51
4.1.2.11	SuperLU	51
4.1.3	Geometria Computacional	52
4.1.3.1	CGAL	52
4.1.4	Transformada de Fourier	52
4.1.4.1	FFTW	52
4.1.4.2	Kiss FFT	52
4.1.5	Processamento Paralelo	53
4.1.5.1	MPI	53
4.1.5.2	PVM	53
4.1.6	Diversas	54
4.1.6.1	JScience	54
4.1.6.2	JSCL-Meditor	54
4.2	Calculadoras científicas	54

4.2.1	Calcoo	54
4.2.2	Calculator	54
4.2.3	Mate	56
4.2.4	Orpie	56
4.2.5	rpcalc	56
4.3	Lógica de alta ordem	56
4.3.1	HOL	56
4.3.2	Metamath	57
4.4	Computação numérica	57
4.4.1	Chombo	57
4.4.2	SUNDIALS	57
4.4.3	TeLa	58
5	Conclusões	59
A	Licenças de uso	60
A.1	General Public License (GPL)	60
A.1.1	LICENÇA PÚBLICA GERAL GNU Versão 2, junho de 1991	60
A.1.2	Preâmbulo	60
A.1.3	TERMOS E CONDIÇÕES PARA CÓPIA, DISTRIBUIÇÃO E MODIFICAÇÃO	60
A.1.4	AUSÊNCIA DE GARANTIAS	62
A.2	Licença BSD	63
A.3	GNU Free Documentation License (GFDL)	63
A.3.1	INTRODUÇÃO	63
A.3.2	APLICABILIDADE E DEFINIÇÕES	63
A.3.3	FAZENDO CÓPIAS EXATAS	64
A.3.4	FAZENDO CÓPIAS EM QUANTIDADE	64
A.3.5	MODIFICAÇÕES	64
A.3.6	COMBINANDO DOCUMENTOS	66
A.3.7	COLETÂNEAS DE DOCUMENTOS	66
A.3.8	AGREGAÇÃO COM TRABALHOS INDEPENDENTES	66
A.3.9	TRADUÇÃO	66
A.3.10	TÉRMINO	66
A.3.11	REVISÕES FUTURAS DESTA LICENÇA	66

Lista de Figuras

1.1	Unix.	11
1.2	Dennis Ritchie e Ken Thompson, do Bell Labs.	12
1.3	Richard M. Stallman, fundador do projeto GNU e da FSF.	12
1.4	O símbolo do projeto GNU.	13
1.5	Símbolo do kernel HURD.	14
1.6	Linux Torvalds.	14
1.7	Tux, o mascote do Linux.	15
1.8	Celular com Linux e um supercomputador com Linux.	16
1.9	Algumas distribuições Linux.	16
1.10	O símbolo do Ubuntu.	16
2.1	Axiom.	20
2.2	Magma.	21
2.3	Maple.	21
2.4	Mathomatic.	22
2.5	Maxima.	23
2.6	Qalculate!	25
2.7	KASH/KANT.	27
2.8	Superfície plotada com o Euler.	29
2.9	FreeMat.	29
2.10	Octave.	30
3.1	Endlos.	31
3.2	Eyefrac.	33
3.3	Um fractal do tipo IFS gerado pelo Glito.	33
3.4	Archimedes Geo3D.	34
3.5	Superfície parametrizada gerada com o Axel.	35
3.6	C. a R. e o CaRMetal.	35
3.7	Dr. Geo.	36
3.8	Gambol.	37
3.9	Geogebra.	38
3.10	Geometry Expressions.	38
3.11	Geomview.	39
3.12	Geoproof.	39
3.13	Easy Funktion.	41
3.14	Grace.	42
3.15	LabPlot	43
3.16	MayaVi2	44

3.17	OpenDX.	45
4.1	SymPy.	47
4.2	Diagrama da especificação MPI.	53
4.3	Calcoo.	55
4.4	Calculator.	55

Capítulo 1

Software livre: Uma breve história

1.1 No princípio era o Unix...



Figura 1.1: Unix.

Após mais de trinta anos, o Unix é tido como um dos sistemas operacionais mais poderosos, versáteis e flexíveis já criados. Vários fatores fizeram com que ele fosse o sistema operacional mais popular do mundo, entre eles a habilidade em ser executado em várias plataformas (de celulares a supercomputadores) e a sua portabilidade, o que permitiu que vários fabricantes o adotassem [1].

As raízes do UNIX vem do início dos anos 1960, quando a AT&T, Honeywell, GE e o MIT (Instituto de Tecnologia de Massachusetts) entraram num projeto de desenvolvimento do primeiro sistema operacional de tempo compartilhado, o MULTICS (Multiplexed Information and Computing Service).

O MULTICS era um sistema modular, funcionando numa bancada de processadores, memórias e equipamentos de comunicação de alta velocidade. Na forma que foi feito, partes do computador poderiam ser desligadas para manutenção sem que outras partes ou usuários fossem afetados. O objetivo era ter alta disponibilidade (24 horas por dia, 365 dias por ano), além do computador poder ser incrementado facilmente apenas adicionando mais partes.

Em 1969, o projeto estava muito atrasado e a AT&T resolveu abandoná-lo. O MIT continuou com o projeto. Neste mesmo ano, Ken Thompson, um pesquisador do Bell Labs (até então pertencente à AT&T) que havia trabalhado no projeto, usou um computador PDP-7 para pesquisar algumas idéias do MULTICS por conta própria. Logo depois, Dennis Ritchie, que também trabalhou no MULTICS, se juntou a ele. Posteriormente, Doug McIlroy e J. F. Ossanna também se juntaram ao projeto. Seu objetivo era fazer um sistema operacional, baseado na idéia do MULTICS, que fizesse inicialmente bem uma coisa: executar programas.

Em 1971 saiu a primeira versão do sistema de Thompson e Ritchie, o UNICS. Ele foi feito em Assembler, em um minicomputador PDP-11, da Digital. Incluía sistema de arquivos, um editor de linhas, algumas ferramentas de texto e gerência de processos. Por essa ocasião, o MULTICS tornou-se também um produto comercial, mas não na escala em que os seus desenvolvedores queriam. Para melhorar a portabilidade, o UNICS foi reescrito na linguagem de programação B, derivada do BCPL.

Só que a linguagem B não se adaptava bem ao novo hardware usado para o desenvolvimento do Unix, um minicomputador PDP-11. Daí, Ritchie resolveu alterar a linguagem, criando a NB ("New B"), que foi logo rebatizada para C. Em 1973 o UNICS foi reescrito em C, o que foi uma longa e penosa tarefa, mas também foi talvez o fato mais importante da história deste sistema operacional. Isto significava que o UNICS poderia ser portado para um novo hardware em pouco tempo, e que mudanças eram fáceis de serem implementadas. Logo, o sistema portado foi rebatizado de UNIX, e a linguagem C, derivada do B, foi usada na sua construção. A linguagem C, na verdade, foi projetada para o sistema operacional UNIX, e portanto há uma grande sinergia entre C e UNIX[2].

Em 1975 foi lançada a V6, que foi a primeira versão do UNIX amplamente disponível fora dos domínios do Bell Labs, especialmente em universidades. Por essa época, a AT&T estava passando por uma longa investigação anti-monopólio, com base



Figura 1.2: Dennis Ritchie e Ken Thompson, do Bell Labs.

na Lei Sherman norte-americana, e não poderia então tornar o seu produto (o UNIX) um software comercial. Isso configuraria, aos olhos dos investigadores, que ela estava tentando expandir o seu monopólio para a área de sistemas operacionais de computadores. Logo, o sistema era copiado sem custo algum, e redistribuído sem nenhuma garantia, manual de instruções ou suporte. Mesmo assim, o UNIX foi amplamente adotado pela comunidade científica, pois entre outras coisas, o minicomputador mais comum das universidades até então era o PDP-11, da Digital, o mesmo computador usado por Ritchie e Thompson para desenvolver o seu sistema.

Este foi o início da diversidade e popularidade do UNIX. Nesta época a Universidade de Berkeley (Califórnia, EUA), solicitou uma cópia dos fontes do UNIX e alunos começaram a fazer modificações ao sistema. Daí surgiu o BSD (Berkeley Software Distribution)[3]. A Internet em si deve muito ao BSD, especialmente à versão 4.2BSD. Foi nela que veio, pela primeira vez, o conjunto de protocolos TCP/IP, e com isso permitiu pavimentar o caminho que hoje é a Internet, entre muitos outros achados.

Outras empresas e instituições começaram a criar em cima dos originais do UNIX: Sun Microsystems (Sun OS e o Solaris), Digital Research (Ultrix), IBM (AIX), Apple (A/OS e o Mac OS X), Silicon Graphics (IRIX), entre tantos outros. Hoje em dia, existem mais de 50 sistemas operacionais "padrão UNIX" no mundo. Para manter a compatibilidade, e a coesão entre esses vários sistemas, foi formado no final dos anos 1970, o USG (Unix System Group), que em 1989 tornou-se o USO (Unix Software Operation).

Posteriormente, a IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineers) criou um conjunto de normas, as normas POSIX (Portable Operating System Interface)[15]. Os sistemas que obedecem a esse conjunto de regras para as interfaces de software e usuário, são considerados sistemas padrão UNIX. A marca UNIX, hoje em dia, pertence ao The Open Group, um consórcio surgido a partir da Open Software Foundation, com a união do X/Open[18]. O código-fonte original, depois de muitas lutas judiciais, pertence hoje à Novell, com todos os direitos reservados à ela.

1.2 O projeto GNU



Figura 1.3: Richard M. Stallman, fundador do projeto GNU e da FSF.

Richard Matthew Stallman, bacharel em Física por Harvard e pesquisador do laboratório de Inteligência Artificial do MIT, começou a sua carreira em 1971[16]. Ele vinha de uma cultura onde trocar códigos-fonte de programas era como trocar

receitas culinárias: Não havia código a ser fechado e mantido longe dos olhos dos programadores. Nessa época, mesmo as empresas de informática distribuíam software, junto com o código-fonte disponível, pois seu modelo econômico vinha de que o dinheiro ganho era na venda do hardware. O software era um acessório. Programadores eram livres para cooperar entre si, e freqüentemente faziam isso.

No final dos anos 1970, a cultura hacker, que primava pela troca de código-fonte, estava em declínio. Uma empresa, fundada por ex-hackers do mesmo laboratório de pesquisas onde Stallman estava sediado, estava forçando a criação de um monopólio dentro desse laboratório, e ele viu-se no final, sozinho, como o último da sua geração, de programadores que compartilhavam código-fonte, que preferiam a liberdade.

Ao mesmo tempo, estavam ocorrendo vários duelos na justiça norte-americana para definir quem era o dono do UNIX. A AT&T Já tinha sido dividida pelo Governo norte-americano, e agora ela queria ganhar dinheiro com a criação dos pesquisadores do seu centro de pesquisas (o Bell Labs).

Em setembro de 1983, Richard Stallman publicou o que conhecemos como o Manifesto GNU[12], e depois afastou-se dos seus afazeres acadêmicos (incluindo um doutorado inacabado) para tornar-se um ativista político em prol da liberdade e do software livre.

1.2.1 Software livre: Definição

A palavra "livre" ("free" no original) está relacionada com liberdade, ao invés de preço. Vale relembrar a famosa frase de Linus Torvalds:

Free as in free speech, not as in free beer.

Você pode ou não pagar para obter software livre, que siga a licença de uso apregoada pelo projeto GNU¹. Mas uma vez que você tenha o software você tem quatro liberdades garantidas na sua utilização:

1. A liberdade de usar o programa da forma como lhe melhor aprouver.
2. A liberdade de copiar o programa, repassando-o para quem você quiser: Amigos, colegas de trabalho, qualquer pessoa.
3. A liberdade de modificar o programa de acordo com os seus desejos, por ter acesso completo aos fontes.
4. A liberdade de fazer modificações, distribuir essas versões modificadas e assim ajudar a construir uma comunidade.

Se você redistribui software que é regido pela GPL, você pode cobrar pelo ato de transferir uma cópia, ou você pode dar cópias de graça. Mas não pode vender o software em si, e nem pode impedir que outros o redistribuam.

1.2.2 GNU is not Unix



Figura 1.4: O símbolo do projeto GNU.

O Projeto GNU (acrônimo de "GNU's Not Unix", ou Gnu Não é Unix), foi idealizado em 1983 como uma forma de trazer de volta o espírito cooperativo que havia na comunidade de informática anteriormente, tornando a cooperação possível e removendo os obstáculos criados pelos donos do software proprietário.

¹A licença mais usada é a GPL (General Public License), na versão 2.0. Por ocasião desse trabalho, a versão 3.0 da licença GPL também está disponível.

O manifesto GNU surgiu então em setembro de 1983, e em janeiro de 1984 Stallman saiu do MIT para tornar-se um ativista político em torno da causa do software livre: fundou a Free Software Foundation, uma fundação que sustenta o movimento GNU, e começou a programar (hack, em inglês).

O que o manifesto GNU [12] traz como objetivo, é criar um sistema operacional totalmente livre, aonde qualquer pessoa teria direito de usar, copiar, modificar e redistribuir o programa juntamente com seu código-fonte, desde que os mesmos direitos (listados na seção 1.2.1) sejam garantidos.

Este sistema operacional GNU deveria ser compatível com o UNIX, porém não deveria utilizar-se do código fonte do UNIX. Logo, tudo teria que ser reescrito do zero: utilitários, bibliotecas, núcleo do sistema, tudo. Desde então, vários programadores (incluindo o próprio Stallman) participaram do desenvolvimento do sistema.

Em 1991, o sistema operacional já estava quase pronto, mas faltava o principal, que é o kernel (núcleo) do sistema operacional. O grupo liderado por Stallman estava desenvolvendo um kernel chamado Hurd. A proposta do Hurd² é ser um núcleo (kernel) que use a estrutura microkernel, que é uma filosofia ousada e ainda controversa, para arquitetura de sistemas operacionais [?].



Figura 1.5: Símbolo do kernel HURD.

1.3 Entra o Linux

Porém, em 1991, um jovem estudante de computação da Universidade de Helsinque, chamado Linus Torvalds, começou o desenvolvimento de um kernel que poderia usar todas as peças do sistema operacional GNU. Este kernel ficou conhecido como Linux, contração de Linus e Unix³. Linus teve a ajuda de vários programadores voluntários através da Internet.



Figura 1.6: Linus Torvalds.

²O nome "Hurd" é um acrônimo indiretamente recursivo: Hurd significa "HIRD of Unix-Replacing Daemons", onde "HIRD" significa "HURD of Interfaces Representing Depth".

³Linus, na verdade, queria que o nome fosse FreakX, mas o nome Linux foi criado por Ari Lemmke, administrador do site Funet (ftp.funet.fi), que deu esse nome ao diretório FTP onde o kernel Linux estava inicialmente disponível. Linus não se opôs, embora achasse que um nome que parecesse com o seu nome próprio, era algo arrogante e prepotente. Afinal, ele não era o único programador.

Inicialmente, o projeto era algo particular, inspirado pelo seu interesse no Minix [6], um pequeno sistema UNIX desenvolvido pelo professor Andrew S. Tanenbaum, da Universidade de Vrije, Holanda. A idéia de Linus foi criar (nas suas próprias palavras), "um Minix melhor que o Minix". E depois de algum tempo de trabalho no projeto, sozinho, ele enviou a seguinte mensagem para um grupo na Usenet, o `comp.os.minix`:

Você anseia pelos bons tempos do Minix-1.1, quando os homens eram homens e escreviam seus próprios drivers de dispositivos? Você está sem um bom projeto em mãos e está desejando trabalhar num sistema operacional que você possa modificar de acordo com as suas necessidades? Está achando frustrante quando tudo funciona no Minix? Chega de noite ao computador para conseguir que os programas funcionem? Então esta mensagem pode ser exatamente para você.

Como eu mencionei há um mês atrás, estou trabalhando numa versão independente de um sistema operacional similar ao Minix, para computadores PC-AT-386. Ele está, finalmente, próximo do estado em que poderá ser utilizado (embora possa não ser o que você está esperando), e eu estou disposto a disponibilizar o código-fonte para ampla distribuição. Ele está na versão 0.02... Contudo eu tive sucesso ao executar `bash`, `gcc`, `gnu-make`, `gnu-sed`, compressão, etc. nele.

No dia 5 de outubro de 1991, Linus Torvalds anunciou a primeira versão "oficial" do kernel Linux, a versão 0.02. Desde então, milhares de programadores tem participado do desenvolvimento do Linux, e tem ajudado a fazer dele o que ele é hoje.

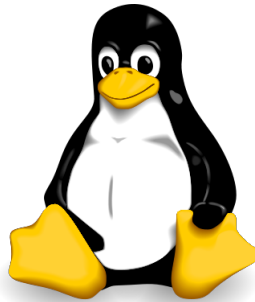


Figura 1.7: Tux, o mascote do Linux.

Como as ferramentas do projeto GNU foram usadas para o desenvolvimento do Linux, é correto afirmar que o nome do sistema é GNU/Linux. Afinal, refere-se ao sistema operacional Linux e ao conjunto de programas GNU desenvolvidos pela Free Software Foundation [9]. Como os casos de sistemas de núcleo(kernel) Linux sem os programas do sistema GNU são raros, frequentemente GNU/Linux e Linux são usados como sinônimos, embora Linux faça referência apenas ao seu núcleo.

Inicialmente desenvolvido e utilizado por grupos de entusiastas em computadores pessoais, o sistema Linux passou a ter a colaboração de empresas como a IBM, Sun Microsystems, Hewlett-Packard (HP), Novell, Intel, AMD e muitas outras. Isso fez o Linux subir à categoria de principal sistema operacional para servidores do mundo (80% dos serviços de hospedagem mais confiáveis da Internet usam Linux nos seus servidores web).

O Linux é um sistema altamente portátil: Por ocasião da redação dessa monografia, o Linux suporta 18 arquiteturas de processadores diferentes. Claro, não chega nem perto do NetBSD (com suporte a 58 arquiteturas de processadores diferentes, nesse mesmo instante [14]), mas traz em si uma flexibilidade imensa: Desde celulares [4] a supercomputadores [17], o Linux tem uma presença ampla hoje em dia no mundo. Desde as urnas eletrônicas no Brasil a terminais de ponto de venda, podemos estar certos: já interagimos, quase todos, com algum sistema baseado em Linux, mesmo sem saber.

1.3.1 As distribuições Linux

Um sistema operacional (uma distribuição) é uma coleção de softwares livres (e às vezes, não-livres) criados por indivíduos, grupos e organizações de todo o mundo, tendo o Linux como seu núcleo. Abaixo, alguns exemplos:

- Empresas: Red Hat, SuSE, Mandriva (união da Mandrake com a Conectiva);
- Comunidades: Debian, Gentoo, Fedora, Ubuntu;
- Indivíduos: Slackware (Patrick Volkerding).



Figura 1.8: Celular com Linux e um supercomputador com Linux.



Figura 1.9: Algumas distribuições Linux.

Logo, podemos, por analogia, explicar que o kernel Linux é como a carta, e a distribuição, o envelope da carta. Ao longo dos anos, várias distribuições surgiram e desapareceram, cada qual com sua característica. Existem distribuições que cabem num disquete de 1,44 MB, outras usam alguns DVDs. Todas elas tem o seu público e sua finalidade. Para questões de padronização, existe um grupo, o LSB⁴, que garante maior padronização, de forma que as diferenças entre as distribuições sejam mais superficiais, mas no interior, a compatibilidade seja mantida.

Hoje em dia, o Linux é uma realidade, e visto pela Microsoft como um concorrente, visto que seu crescimento tem sido a olhos vistos. Em particular, temos visto um crescimento no desktop, onde o Windows ainda domina, mas distribuições como o Ubuntu estão crescendo lenta, mas constantemente.

1.3.2 Uma distribuição em particular: O Ubuntu



Figura 1.10: O símbolo do Ubuntu.

⁴Linux Standard Base <http://www.linuxfoundation.org/en/LSB>

O Ubuntu (pronuncia-se u-BUN-tu) é uma distribuição de Linux originária da África do Sul, e seu nome deriva do conceito sul-africano Ubuntu diretamente traduzido como "humanidade para com os outros" ou "sou o que sou pelo que nós somos".

Uma pessoa com ubuntu está aberta e disponível aos outros, assegurada pelos outros, não sente intimidada que os outros sejam capazes e bons, para ele ou ela ter própria auto-confiança que vem do conhecimento que ele ou ela tem o seu próprio lugar no grande todo.

Arcebispo Desmond Tutu em *No Future Without Forgiveness*.

Esse nome busca passar a ideologia do projeto, baseada nas liberdades do software livre e no trabalho comunitário de desenvolvimento.

O lançamento é semestral, nos meses de abril e outubro, e disponibiliza suporte técnico nos dezoito meses seguintes ao lançamento de cada versão (em inglês). A proposta é oferecer um sistema operacional que qualquer pessoa possa utilizar sem dificuldades, independente de nacionalidade, nível de conhecimento ou limitações físicas. Seu slogan é "Linux para seres humanos". A distribuição deve ser constituída totalmente de software gratuito e livre, além de isenta de qualquer taxa. Cópias podem ser remetidas em CDs para todo o mundo sem custos, basta solicitar.

Hoje em dia o Ubuntu é a que mais cresce entre todas as distribuições Linux. O seu desenvolvimento é feito pela Fundação Ubuntu e patrocinada pela Canonical, empresa fundada por Mark Shuttleworth. Mark é um programador sul-africano, que tornou-se milionário depois de vender sua empresa de segurança de Internet, a Thawte, para a Verisign.

Em 2002 Mark tornou-se o primeiro sul-africano a ir ao espaço, e na volta à Terra, fundou a Ubuntu Foundation e a empresa Canonical Ltd. A Ubuntu Foundation desenvolve o Ubuntu, com o apoio e o patrocínio da Canonical. A intenção da Canonical é promover o acesso de forma gratuita à informação através de um sistema robusto e de fácil uso pelos usuários leigos em computação.

Algumas das distribuições derivadas do Ubuntu são:

Edubuntu Distribuição desenvolvida para o uso em escolas.

Kubuntu Versão do Ubuntu que utiliza o ambiente gráfico livre KDE.

Xubuntu Ubuntu para computadores menos potentes, utilizando o ambiente gráfico Xfce.

Gobuntu Ubuntu somente com software livre, utilizando o ambiente gráfico GNOME.

UbuntuStudio Edição e criação de conteúdos multimídia.

1.3.3 Crescimento no desktop

A última fronteira é a área de trabalho do usuário. Existem várias interfaces gráficas (GUI) que podem ser usadas, depende do interesse do usuário, e da configuração das mesmas. O objetivo não é ter uma interface igual à do Windows, mas dar ao usuário (ou a quem empacota a distribuição) o direito de escolha, de por a interface que quiser.

Os ambientes mais comuns são:

- KDE⁵
- Gnome⁶
- XFCE⁷

Além de ambientes, o Linux traz uma grande quantidade de gerenciadores de janelas, que mudam a forma da interação com as janelas e os elementos da tela, mas não são ambientes completos, como os listados acima.

O Linux tem crescido principalmente pela iniciativa de empresas e do Governo em buscar soluções que requeiram menos manutenção, mais segurança, mais flexibilidade, e também substituir as caras licenças de software proprietário. Ainda é um movimento muito pequeno, e com muita resistência por alguns lados envolvidos, mas as vantagens são inegáveis, e com isso tende a crescer. Nenhuma revolução ocorre de um instante para outro.

⁵K Desktop Environment: KDE <http://www.kde.org>

⁶GNU Object Model Environment: GNOME <http://www.gnome.org>

⁷XFCE <http://www.xfce.org>

1.4 Software de pesquisa em Matemática: O que temos?

Apesar da opinião de boa parte da sociedade leiga, que não há mais nada a se descobrir na Matemática, nunca houve tanta pesquisa, tanto avanço. A pesquisa e o desenvolvimento em Matemática tem sido muito intenso, e sempre há novas descobertas. É sempre bom ressaltar a importância do IMPA como centro de pesquisa em Matemática, um dos maiores do mundo, conforme podemos ver na sua avaliação científica [21].

Ao mesmo tempo, há a necessidade de apoio computacional para a pesquisa em Matemática. Áreas como sistemas dinâmicos, geometria diferencial, teoria dos números e tantos outros campos, necessitam do uso de computadores, e principalmente software desenvolvido para esse fim. Logo, temos software desenvolvido para esse fim.

Numa pesquisa rápida no site Freshmeat [22], encontramos 545 softwares livres, desenvolvidos para lidar com matemática. Iremos analisar algumas dessas soluções, além de alguns softwares proprietários, que estão disponíveis para o sistema operacional Linux.

1.5 Objetivo desse trabalho

O objetivo desse trabalho é trazer, para a pesquisa e educação em Matemática, uma análise das soluções, baseadas em software livre ou não, que podem existir sobre o sistema operacional Linux. Muito tem-se falado, hoje em dia, sobre o uso de software livre em várias instâncias na sociedade: Em empresas, nos Governos Federal, Estaduais e Municipais, em instituições de ensino, e no uso doméstico.

Soluções como o OLPC [19] e o Classmate PC [20], tem sido apregoadas como "a última palavra em tecnologia educacional", fazendo uso inclusive de software livre (de forma obrigatória, como no primeiro, ou opcional, como no segundo).

Nossa intenção é, portanto, observar como tudo tem caminhado o trabalho, avaliá-lo e propor mudanças e alternativas.

Não encontramos nenhuma distribuição específica com ferramentas para pesquisa em matemática, mas quanto à função educacional, encontramos algumas, entre as quais podemos destacar:

- MIL (Matemática Interativa Linux) [13]
- Edubuntu [7]
- Freeduc [8]

Capítulo 2

Álgebra

Boa parte dos softwares criados para lidar com álgebra computacional combinam uma linguagem de programação interpretada com um ambiente onde pesquisadores e estudantes podem inserir equações da maneira tradicional. Dessa forma, os recursos da própria aplicação podem ser usados para resolver a mesma de forma simbólica ou numérica.

2.1 Álgebra Computacional

2.1.1 Aldor

O *Aldor* [23] é uma linguagem de programação (originalmente conhecida como $A^\#$), com um sistema de tipagem que a torna interessante para desenvolvimento de sistemas de álgebra computacional. Originalmente ela era uma linguagem usada para estender as capacidades do sistema Axiom ([24]), mas hoje o foco é mais amplo. A linguagem está liberada segundo uma licença livre e própria, a Aldor Public License (versão 2.0), e tem versões pré-compiladas para Linux, Solaris e Windows.

2.1.2 Axiom

O *Axiom* [24] é um sistema de álgebra computacional licenciado hoje em dia sobre a licença BSD Modificada, e está em desenvolvimento desde 1971, originalmente com o nome *Scratchpad*, por pesquisadores da IBM. A filosofia por trás do Axiom determina que o programa seja bem documentado, correto e categorizado segundo uma hierarquia de tipos matemáticos.

Com isso, ele é eficiente para a pesquisa de novos algoritmos matemáticos, e a idéia é que o seu código-fonte seja aproveitado para, no futuro, a nova geração de softwares de álgebra computacional. Logo, com todas essas características, o Axiom tem hoje em dia uma grande lista de "descendentes", como o FriCAS (seção 2.1.6), o OpenAxiom (seção 2.1.17), o REDUCE (seção 2.1.20) e outros.

2.1.3 DCAS

O *DCAS* [25] faz simplificação algébrica e rearranjos, gera gráficos em 2D e 3D, aproximação, exporta para texto, HTML e \LaTeX . É liberado segundo a licença GPL, não tem interface gráfica, e pode ser executado em qualquer plataforma com um compilador C.

2.1.4 Eigenmath

O *Eigenmath* é um sistema de álgebra computacional [26] escrito em C, liberado como código aberto (embora a licença não esteja clara), com interface gráfica e exemplos disponíveis. O site é bem simples, com pouca informação.

2.1.5 Fermat

O *Fermat* [27] é um software de álgebra computacional de código fechado, liberado sob uma licença shareware (US\$ 50), e com versões para Windows, Linux, Mac OS X e Unix em geral. Ele é desenvolvido por Robert H. Lewis, da Fordham University, e é especialmente capacitado para lidar com aritmética envolvendo inteiros de comprimento arbitrário, frações, gráficos, álgebra polinomial e matricial.

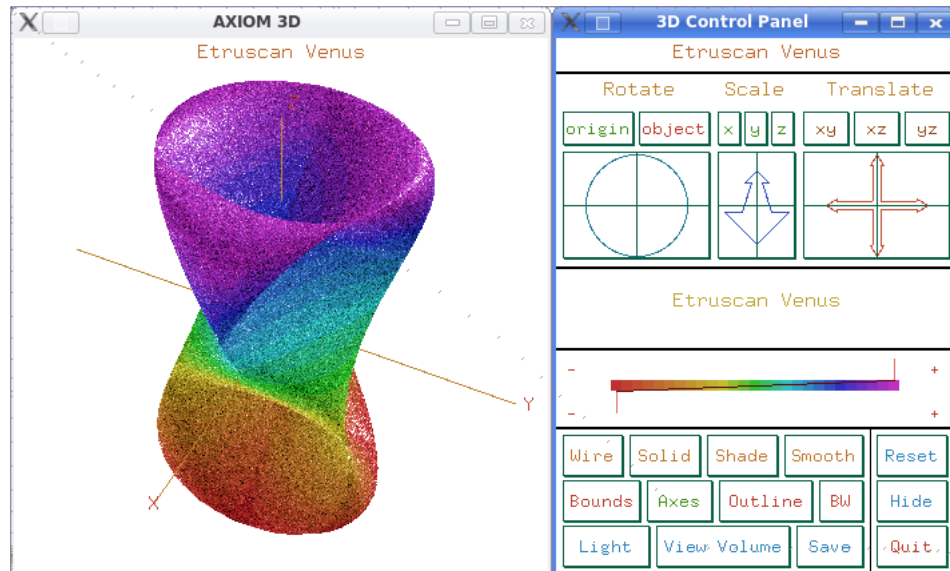


Figura 2.1: Axiom.

Um dos seus focos é a velocidade: No slogan da empresa produtora, “*se você precisa computar o polinômio característico de uma matriz de 400×400 sobre \mathbb{Q} , você precisa do Fermat*”. No site, tem um artigo onde é feito um comparativo de desempenho entre o Fermat e vários outros softwares, já citados (SAGE, CoCoA, Magma, etc), e está em [28].

2.1.6 FriCAS

O *FriCAS* [29] é um software de álgebra computacional, liberado sobre uma licença livre (GPL), e que é uma ramificação (*fork*) de outro software, o Axiom ([24]). Lida com assuntos tão díspares na matemática quanto integração e diferenciação (cálculo) a álgebra abstrata. Possui um sistema de ajuda integrado, e é capaz de gerar gráficos.

2.1.7 Giac/xcas

O *Giac* [30] é um programa livre para álgebra computacional para Windows, Mac OS X e Linux. Ele tem modos de compatibilidade com o Maple, o MuPAD e a calculadora TI-89, da Texas Instruments. O *Xcas* é uma das interfaces que podem ser executadas sobre o Giac, para facilitar a interação do usuário.

2.1.8 Magma

O *Magma* [31] é um sistema distribuído sob uma licença não-comercial, mas proprietária¹, produzido pelo Grupo de Álgebra Computacional da Escola de Matemática e Estatística da Universidade de Sydney, Austrália. O mesmo foi baseado em outro software, o Cayley², e temos aproximadamente uma versão nova por ano. Existem versões do Magma para Windows, Linux, Mac OS X, Solaris, Tru64 e AIX, nativas para arquiteturas 32 e 64 bits, como processadores x86, PPC, IA64, Alpha e Sparc.

O Magma lida com campos da matemática como:

- Teoria dos Grupos;
- Teoria dos Números;
- Álgebra Linear;
- Matrizes esparsas;
- Geometrias Algébrica e Aritmética;
- Álgebra Comutativa;

¹A intenção é não auferir lucro, mas custear o desenvolvimento do software, apenas.

²Homenagem ao matemático Arthur Cayley.

- Entre muitos outros.

No site, há inclusive uma demonstração online, para que sejam feitas experiências.



Figura 2.2: Magma.

2.1.9 Maple

O *Maple* [32] é um software para álgebra computacional, distribuído segundo uma licença comercial e proprietária, e é um produto da Maplesoft. O seu desenvolvimento começou em 1981 pelo Grupo de Computação Simbólica na Universidade de Waterloo em Waterloo, no Canadá. A versão mais conhecida é o Maple V, de 1990, com cinco atualizações, até 1997. A palavra "Maple", entre outros significados, é um acrônimo para **M**athematics with **P**LEasure (Matemática com prazer).

O Maple hoje em dia é desenvolvido pela Maplesoft, empresa canadense (anteriormente conhecida como Waterloo Maple) com a cooperação da Universidade de Waterloo e de vários centros de pesquisa ao redor do mundo. Ele é distribuído em versões educacional e profissional.

2.1.10 MathEclipse

O *MathEclipse* [33] é um software de álgebra computacional escrito em Java, que pode ser usado isoladamente, online, ou como um plugin do ambiente integrado de desenvolvimento Eclipse³. Faz uso de recursos como Web 2.0 e AJAX, e tem funções para lidar com aritmética de precisão arbitrária, matrizes, vetores, conjuntos finitos, derivadas, e programação funcional. Ele está liberado segundo uma licença livre, a Common Public License (CPL).

Uma das suas características mais interessantes é a arquitetura cliente-servidor, via Internet: Você pode submeter cálculos via Internet para um servidor rodando o MathEclipse a partir de um celular ou PDA, por exemplo.

2.1.11 Mathmagix

O *Mathmagix* [34] é um sistema de álgebra computacional que é composto de:

1. Uma linguagem de programação de alto nível, imperativa, com tipos polimórficos e parametrizáveis. Logo, pode ser usada como uma linguagem para estender as capacidades de bibliotecas existentes em outras linguagens, como C++. Há um interpretador (lento) pronto, mas para breve será finalizado o compilador.

³Eclipse <http://www.eclipse.org>

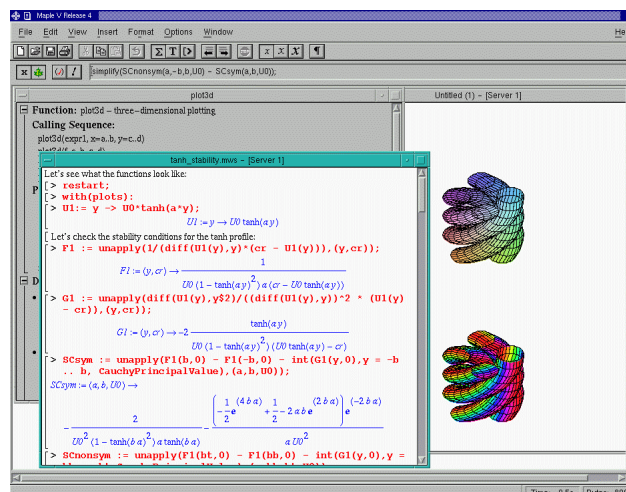


Figura 2.3: Maple.

- Um conjunto de bibliotecas para computação algébrica. Logo, números grandes, polinômios, séries de potência, matrizes, transformações rápidas de Fourier, tudo isso está implementado. O Mathemagix, assim, pode ser uma boa ponte entre a análise numérica e a computação simbólica.

A licença que rege a distribuição do Mathemagix é a GPL, que é uma licença livre. O Mathemagix tem versões pré-compiladas para Linux, Mac OS X e Windows.

2.1.12 Mathematica

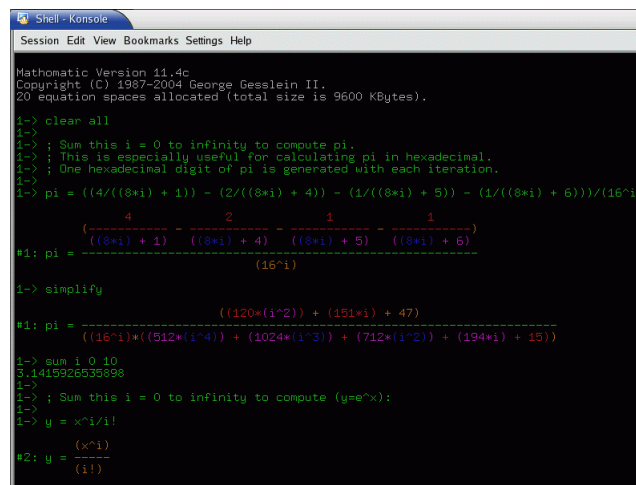
O software *Mathematica*, da Wolfram Research [35] implementa um sistema de álgebra computacional, além de poder ser usado para digitação de documentos com formatação matemática complexa (como temos no $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$). Ele tem uma linguagem de programação, e diversas bibliotecas de programação prontas para serem usadas com diversos usos, inclusive em matemática. Hoje em dia ele também permite a interação com programas escritos em linguagens como Java e C++. Ele é liberado sob uma licença comercial e proprietária.

2.1.13 Mathomatic

O *Mathomatic* [36] é um software para álgebra computacional livre, cujo código-fonte é escrito em C (16.000 linhas). A sua implementação começou em 1986, e hoje é capaz de resolver simbolicamente derivadas, séries de Taylor, integração polinomial e transformadas de Laplace, além de simplificar expressões, aritmética com números complexos, etc. Logaritmos não estão implementados, assim como exponenciais complexas. Toda a aritmética do Mathomatic usa ponto flutuante de dupla precisão, e não tem o uso do erro de arredondamento. Logo, esse programa não é aconselhado para projetos que exijam uma precisão alta, como quando há a necessidade de ter mais de 14 casas decimais.

Uma outra característica interessante do Mathomatic é que ele consegue gerar código em C, Python ou Java, com as expressões trabalhadas nele. Ele não tem interface gráfica ou outras facilidades, funcionando mais como uma calculadora algébrica, o que é vantajoso para executá-lo em ambientes exíguos em memória: A partir de 1 Mb de RAM o Mathomatic pode ser executado. Existem versões sendo executadas em sistemas baseados em Linux e BSD. Como curiosidade, o Mathomatic foi portado para o Nintendo DS, videogame portátil da empresa japonesa Nintendo.

Como o Mathomatic é regido por uma licença livre (LGPL), ele está aberto a novas implementações e adição de novidades, basta alguém fazê-lo.



```

Shell - Konsole
Session Edit View Bookmarks Settings Help

Mathomatic Version 11.4c
Copyright (C) 1987-2004 George Gesslein II.
20 equation spaces allocated (total size is 9600 KBytes).

1-> clear all
1->
1-> ; Sum this i = 0 to infinity to compute pi.
1-> ; This is especially useful for calculating pi in hexadecimal.
1-> ; One hexadecimal digit of pi is generated with each iteration.
1->
1-> pi = ((4/((8*i) + 1)) - (2/((8*i) + 4)) - (1/((8*i) + 5)) - (1/((8*i) + 6)))/(16^i)
      (-----)
      (4      2      1      1)
      ((8*i) + 1) ((8*i) + 4) ((8*i) + 5) ((8*i) + 6)
*1: pi = -----
          (16^i)

1-> simplify
*1: pi = -----
          ((120*(1^2)) + (151*i) + 47)
          ((16^i)*((512*(1^4)) + (1024*(1^3)) + (712*(1^2)) + (194*i) + 15))

1-> sum i 0 10
3.1415926535898
1->
1-> ; Sum this i = 0 to infinity to compute (y=e^x):
1->
1-> y = x^i/i!
      (x^i)
*2: y = ----
      (i!)
  
```

Figura 2.4: Mathomatic.

2.1.14 Maxima

O *Macysma* [37] é o decano dos softwares de álgebra computacional. Seu desenvolvimento ocorreu durante 14 anos (de 1968 a 1982), no Instituto de Tecnologia de Massachussets (MIT), nos Estados Unidos, e muito do que foi criado e aprendido no seu desenvolvimento, hoje é encontrado em softwares como o Mathematica e o Maple, entre outros. Ele foi o primeiro sistema de matemática simbólica, e um dos primeiros sistemas baseados em conhecimento criados. Entre 1982 e 1999, ele foi comercializado

Um dos autores, Bill Schelter, teve autorização para licenciar o código-fonte segundo a licença GPL, e foi o seu principal mantenedor até 2001, quando veio a falecer. Essa implementação é o *Maxima* [38], que é mantido até hoje por uma comunidade grande de desenvolvedores ao redor do mundo.

O Maxima é um sistema de álgebra computacional especializado em operações simbólicas e aritmética de precisão arbitrária, limitada apenas pelo tamanho da memória do computador, além de gerar código em FORTRAN para cálculos que usam muito ponto flutuante e matrizes, de forma que sejam mais eficientes. Mas também consegue fatorar números grandes, manipular polinômios, entre outras características.

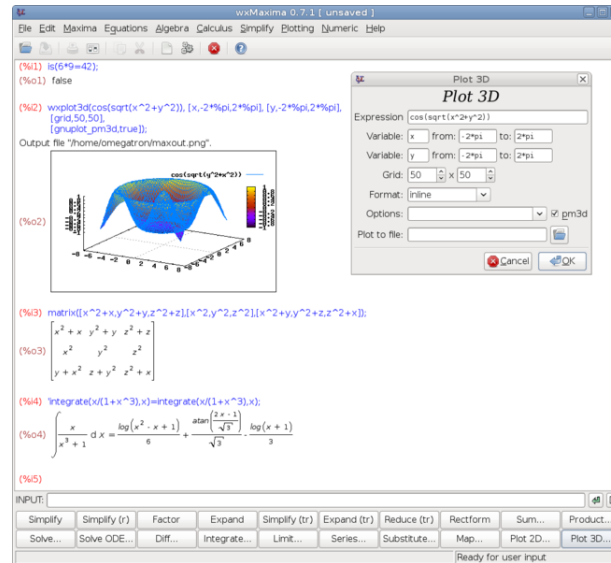


Figura 2.5: Maxima.

2.1.15 MuPAD

O *MuPAD* [39] é um sistema distribuído para Windows, Linux e Mac OS X, sob uma licença proprietária, e que tem uma versão gratuita (MuPAD Light).

2.1.16 Números primos de Mersenne e o projeto GIMPS

Marin Mersenne foi um matemático, teórico musical, padre mínimo, teólogo e filósofo francês. Viveu entre os anos de 1588 e 1648, e tornou-se conhecido especialmente pelo seu estudo dos chamados *números de Mersenne*, em especial dos *primos de Mersenne*.

Mersenne procurava encontrar uma fórmula que descrevesse todos os números primos. Numa correspondência trocada com Pierre de Fermat (autor, entre outros, do Último Teorema de Fermat⁴), este disse a Mersenne que todos os números que fossem escritos na forma $2^{2^p} + 1$ eram primos. Esses são conhecidos como números de Fermat. Mersenne, então, estudou os números que podem ser escritos da forma $2^p - 1$, com p sendo um número primo. O próprio Mersenne verificou que esses números eram primos para $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127$ e 257.

O projeto *GIMPS* (**G**reat **I**nternet **M**ersenne **P**ri^me **S**earch) [40] consiste em um grande esforço de computação distribuída via Internet, para construir o subconjunto dos números primos de Mersenne, dentro do conjunto dos números primos. Para participar, basta inscrever-se no site, e baixar o programa (disponível para Windows, Linux, Mac OS X, OS/2 ou FreeBSD), e seguir a orientação do site: O programa será executado com baixíssima prioridade, só tirando proveito dos momentos de inatividade do computador. Até o momento, foram encontrados 46 números primos de Mersenne, sendo o último deles, encontrado em 23 de agosto de 2008. O número encontrado é $2^{43.112.609} - 1$, composto por 12.978.169 algarismos.

⁴Não existe nenhum conjunto de números inteiros positivos maior do que 2 que satisfaça $x^n + y^n = z^n$. Foi (finalmente) provado por Andrew Wiles, em 1995, depois de estar quase 360 anos em aberto.

2.1.17 OpenAxiom

O *OpenAxiom* [41] é um software de álgebra computacional, e inicia-se como uma ramificação (*fork*) do Axiom, software anteriormente citado na seção 2.1.2. Ele é liberado sob uma licença livre (BSD modificada). Uma curiosidade é que o OpenAxiom tem versões para Windows, Linux e Mac OS X, mas também para dispositivos portáteis. Seu desenvolvedor principal é o pesquisador Gabriel dos Reis⁵, da Texas A&M University⁶.

2.1.18 PARI/GP

O *PARI/GP* [42] é um sistema de álgebra computacional, semelhante a softwares como o Mathematica (2.1.12), SAGE (2.1.21) e outros, desenvolvido na Universidade de Bordeaux, França. Só que o PARI/GP tem uma ênfase maior em Teoria dos Números, e resolução de problemas computacionais relacionados. Ele está liberado segundo a licença GPL, e foi escrito em C. Algumas das suas características são:

- Cálculos em precisão arbitrária.
- Capacidade de realizar fatorizações, cálculos com matrizes, polinômios, séries de potência, teoria algébrica dos números, entre outros.
- Uma linguagem de script, que pode ser convertida para código-fonte em C, de forma que pode ser compilado e executado, como um programa binário.

Uma curiosidade é que o PARI/GP foi originalmente liberado segundo uma licença proprietária e restritiva. A partir da versão 2, o seu código-fonte foi aberto, e a licença foi mudada, para a GPL.

2.1.19 Qalculate!

O *Qalculate!* [43] é um sistema de álgebra computacional travestido de calculadora científica, usado para resolver expressões numéricas simples e rápidas, mas com um conjunto de recursos muito completo, como:

- Números reais e complexos;
- Bases de numeração, de 2 a 36, números romanos e formato de hora;
- Notação Polonesa Reversa (RPN);
- Precisão arbitrária;
- Apresenta resultados em todas as bases, em forma de fração;
- Realiza fatoração, simplificação, derivação e integração;
- Conversão de bases, moedas e grandezas físicas;
- Entre muitos outros recursos.

O Qalculate! é uma boa opção para substituir a calculadora padrão do sistema, já que ela traz muitos recursos, para quem precisa resolver alguns cálculos rápidos no dia-a-dia, e ainda não precisa realizar, naquele momento, pesquisa em matemática, mas só resolver um problema mais simples.

2.1.20 REDUCE

O *REDUCE* [44] é um software de álgebra computacional cujo projeto inicial remonta aos anos 1960. A versão mais atual é de 2004, e ele é conhecido como uma calculadora algébrica para problemas que são possíveis de serem feitos à mão. Só que isso é minimizar as suas características, já que vários problemas mais complexos podem ser resolvidos com o REDUCE.

O REDUCE foi escrito em Standard Lisp, e o seu código-fonte está disponível. Ele não está liberado segundo uma licença livre, mas é vendido a um custo muito baixo, basicamente para cobrir despesas no processo de produção do software. Existem versões para Linux, Mac OS X, Windows e outras variações do Unix. É possível encontrá-lo já otimizado para arquiteturas tão díspares como PCs e Macs até supercomputadores Cray e estações de trabalho Silicon Graphics.

Algumas das suas características são: Expansão e fatoração de polinômios, simplificação de expressões, cálculos com matrizes simbólicas, aritmética de precisão arbitrária, diferenciação e integração, entre outros.

⁵Gabriel dos Reis <http://parasol.tamu.edu/people/gdr/>

⁶<http://www.tamu.edu>

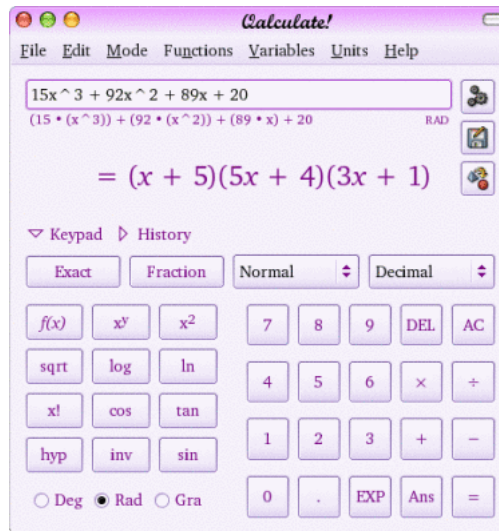


Figura 2.6: Qalculate!

2.1.21 SAGE

O **SAGE (Software for Algebra and Geometry Experimentation)** [45] é distribuído sob a licença GPL, e é escrito em Python e Cython⁷. O seu objetivo, expresso no site, é "ser uma alternativa em código aberto ao Magma, Maple, Mathematica, e MATLAB." Foi desenvolvido inicialmente na Universidade de Washington, Estados Unidos.

Ele inclui interfaces para vários softwares de matemática (como quase todos os acima citados), e trabalha com a idéia de cliente-servidor: Ele tem um servidor Web integrado, o que permite que você possa operá-lo a partir de um navegador, conectando-se ao servidor SAGE e submetendo as suas necessidades, o que pode ser interessante em desenvolvimento e pesquisa compartilhada.

O SAGE tem módulos para álgebra, cálculo, teoria dos números, criptografia, computação numérica, álgebra comutativa, teoria dos grupos, matemática finita, teoria dos grafos e álgebra linear, e farto material em formato audiovisual, como referência. Em 2007, ele ganhou o primeiro prêmio na categoria de software científico na Les Trophées du Libre⁸.

2.1.22 TRIP

O **TRIP** [46] é um software de álgebra computacional cujo foco é mecânica celeste. Ele tem versões para Windows, Mac OS X, Linux e OpenBSD, e sua licença é proprietária, sendo gratuito para pesquisa acadêmica, sendo necessária a solicitação de uma chave de uso, gratuita.

2.1.23 Yacas

O **YACAS (Yet Another Computer Algebra System)** [47] é um sistema de álgebra computacional com propósito de uso geral e foco em usabilidade. Tem uma linguagem própria de script, e documentação farta disponível.

2.2 Álgebra comutativa e teoria dos grupos

2.2.1 Bergman

O software *Bergman* [48] é desenvolvido pelo Departamento de Matemática da Universidade de Estocolmo, Suécia, e liberado segundo uma licença livre, a Bergman-GPL (uma variação da GPL original). Seu propósito é realizar computações em álgebra comutativa e não-comutativa, e realizar cálculos como resolver problemas com séries de Hilbert, séries de Poincaré-Betti, entre outros. O software está escrito em Standard LISP, e é considerado um sistema aberto: Quem quiser pode acrescentar funções a ele.

⁷O Cython é uma linguagem cujo objetivo é facilitar a escrita de módulos em C para a linguagem Python. O Cython, em particular, é uma versão modificada de outra linguagem com o mesmo objetivo, a Pyrex.

⁸Les Trophées du Libre <http://www.tropheesdulibre.org/?lang=en> - Concurso internacional de software livre

2.2.2 Cadabra

O *Cadabra* [49] é um sistema de álgebra computacional (CAS) criado especificamente para resolução de problemas em Teoria dos Campos. Tem versões para Windows, Linux e Mac OS X, e embora não esteja clara qual seja a licença, supõe-se que seja uma licença livre: Foram usadas ferramentas do projeto GNU no seu desenvolvimento, e o código-fonte está disponível.

Logo, ele tem funcionalidade em campos como a álgebra tensorial, simplificação polinomial de tensores, Álgebra de Clifford, entre muitos outros. Em particular, uma característica muito interessante é que a entrada e saída de dados usando a notação do software \TeX , muito conhecida entre pesquisadores em matemática.

O *Cadabra* foi desenvolvido por Kasper Peeters, pesquisador do Instituto de Física Teórica, da Universidade de Utrecht, Holanda.

2.2.3 CoCoA

O *CoCoA* (**C**omputations in **C**ommutative **A**lgebra) [50] é um software para álgebra computacional (CAS), desenvolvido na Universidade de Gênova, Itália. Pode ser usado para lidar com diversos tipos de problemas, mas o seu foco é a álgebra comutativa. O *CoCoA* é um software de domínio público, e pode ser livremente redistribuído, estando disponível nas plataformas mais populares (Windows, Linux e Mac OS X). Algumas das suas habilidades consistem em lidar com:

- Números inteiros realmente grandes (como $2^{300000} - 1$, por exemplo).
- Números racionais.
- Polinômios (inclusive realizar operações com estes polinômios).
- Sistemas de equações lineares.
- Soluções inteiras não negativas para sistemas com mais incógnitas do que equações.
- Lógica de primeira ordem.
- Coloração de grafos.

Entre outros. Uma característica interessante é a biblioteca para programação em C++, que ele fornece, e pode ser usada por outros programas.

2.2.4 DoCon

Existem linguagens de programação que fogem ao paradigma mais comum, que é a programação imperativa, onde devemos ter mudanças no estado do programa. No caso da linguagem de programação funcional, a computação é vista como uma avaliação de funções matemáticas, e que evita estados ou dados que mudem [51]. Algumas dessas linguagens são o Erlang, o R, a linguagem de programação embutida no software Mathematica [35], entre outros.

Uma dessas linguagens é a Haskell [52], cujo nome é uma homenagem ao lógico Haskell Curry. Ela tem um propósito geral, e entre outros softwares, foi desenvolvido com ela um programa para matemática simbólica chamado *DoCon* [53].

O *DoCon* é descrito como um "construtor de domínios algébricos", e implementa boa parte da álgebra comutativa: Álgebra Linear, fatorização, bases de Gröbner, entre outros. Ele é considerado um software de código aberto (embora a licença não seja compatível com as licenças livres determinadas pela OSI⁹), e pode ser compilado em qualquer plataforma para o qual exista o compilador da linguagem Haskell.

2.2.5 GAP

O *GAP* (**G**roups, **A**lgorithms, **P**rograms) [54] é um software de álgebra discreta computacional, desenvolvido inicialmente pelo CIRCA¹⁰, da Universidade de Saint Andrews, Grã-Bretanha¹¹. O *GAP* é liberado segundo uma licença livre (GPL), e tem versões para sistemas Unix (Linux incluído), Windows e Mac OS X.

O foco do *GAP* é, dentro da álgebra discreta, a Teoria Computacional de Grupos, embora tenha sido estendido para outros campos do conhecimento matemático. Um fato curioso é que parte da documentação encontra-se traduzida para português¹².

⁹OSI, ou Open Source Initiative <http://www.opensource.org>

¹⁰Centre for Interdisciplinary Research in Computational Algebra <http://turnbull.dcs.st-and.ac.uk/circa/>

¹¹<http://www.st-andrews.ac.uk/>

¹²<http://www.fc.up.pt/cmup/monograph/gap-notas.pdf>

Entre outras funcionalidades, o GAP traz inclusive uma linguagem de programação, muito próxima do PASCAL (também chamada de GAP) para explorar melhor os recursos do sistema, e traz já escrita nessa linguagem milhares de funções, para lidar com questões como: grupos policíclicos, grupos automáticos, bases de Gröbner, autômatos, linguagens formais, espaços vetoriais, anéis, entre outros.

2.2.6 JAS

O JAS (Java Algebra Software) [55] é um software de álgebra computacional escrito em Java com ênfase em álgebra comutativa. Logo, seu foco é em polinômios solúveis, bases de Gröbner, entre outros. O JAS pode ser usado interativamente, ou através de uma interface para programação, escrita em Jython¹³. Ele tem suporte a arquitetura de processadores 64 bits, de múltiplos núcleos e sistemas operacionais multi-thread. A sua licença é a GPL, uma licença livre, e o código-fonte está disponível, sendo que suas bibliotecas podem ser usadas para outras soluções, desde que a licença seja respeitada.

2.2.7 KASH/KANT

O KASH/KANT [56] é um pacote de software para matemáticos interessados em trabalhar com Teoria dos Grupos, e desenvolvido pelo KANT Group, da Universidade Técnica de Berlim, Alemanha, também desenvolvedores do software de mesmo nome. O software KASH (KAnt SHell) é, portanto, uma interface para o KANT. Seus campos de atuação compreendem:

- Computações em grupos numéricos;
- Aritmética de números algébricos;
- Computações de máxima ordem;
- Computação de subgrupos em grupos numéricos;
- Determinação de grupos de Galois até a 15ª ordem;
- Automorfismos de grupos abelianos;
- Entre outros.

Sua linguagem de programação é semelhante ao Pascal, a documentação é farta, e pode interagir com bibliotecas de processamento paralelo como o PVM (seção 4.1.5.2).

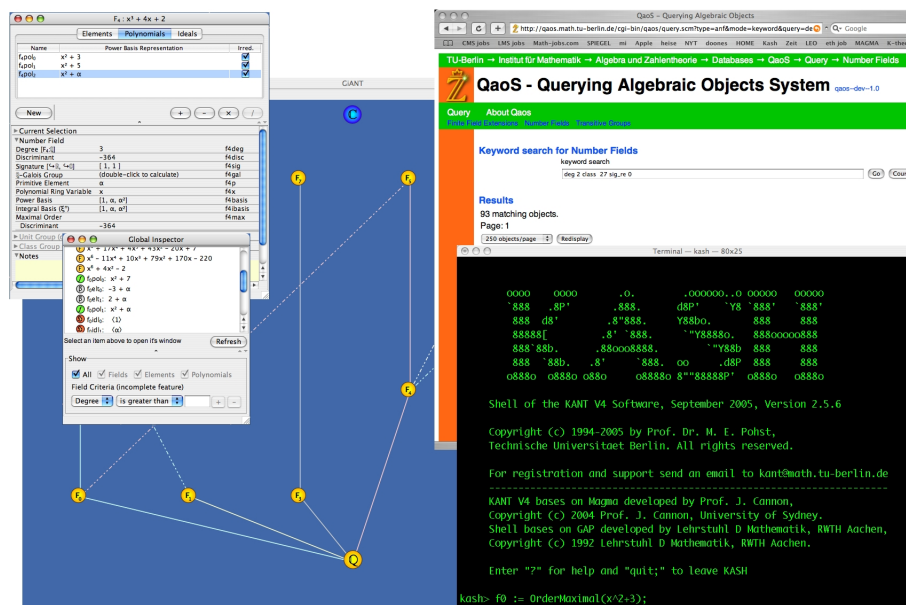


Figura 2.7: KASH/KANT.

¹³Jython = Fusão de Java com Python.

2.2.8 Macaulay2

O *Macaulay2* [57] é um sistema de álgebra computacional focado em álgebra comutativa e geometria algébrica, especialmente no cálculo de bases de Gröbner. Seu nome é uma homenagem ao matemático F. S. Macaulay, que trabalhou em Teoria da Eliminação. Existem versões dele para Windows, Mac OS X e Linux, e o código-fonte é aberto (licença GPL).

2.2.9 Magnus

O *Magnus* [58] é um software de álgebra computacional focado em pesquisa na Teoria de Grupos Infinitos. Sua licença é livre (GPL), e implementa um grande conjunto de procedimentos que podem ser aplicados a grupos infinitos, de forma a extrair propriedades desses grupos. Tem uma interface fácil de usar, mas nem tudo está pronto nele: É um software em contínuo desenvolvimento. Uma das suas características é uma linguagem de script, baseada em Python, através da qual certas atividades podem ser automatizadas.

2.2.10 Singular/PLURAL

O *Singular* [59] é um sistema de álgebra computacional cuja ênfase está em álgebra comutativa, geometria algébrica e teoria das singularidades. Uma das suas características é sua linguagem de programação interna, bem parecida com a linguagem C. Sua licença é livre (GPL), e tem versões para Mac OS X, Windows e várias versões de Unix (Linux incluído).

O *PLURAL* [60] é uma extensão do núcleo do Singular, com o foco específico de realizar cálculos rápidos com álgebras polinomiais não-comutativas. Logo, aceita problemas de muitos campos (álgebra de Lie, geometria algébrica, equações diferenciais, etc). Também segue a mesma licença livre (GPL).

2.3 Álgebra linear e análise numérica

Boa parte dos sistemas acima citados tem capacidade para lidar com problemas de álgebra linear. Abaixo veremos alguns que tem um foco mais específico.

2.3.1 MATLAB

O *MATLAB* (**MAT**rix **LAB**oratory) [61] é o mais popular dos softwares de análise e cálculo numérico, sendo usado por várias áreas afins à Matemática Aplicada. Ele é um programa distribuído segundo uma licença comercial para Windows, Linux e outras plataformas, e é produzido pela empresa Mathworks [62].

Ele tem três funcionalidades: Um ambiente interativo de execução, uma linguagem de programação interpretada e as extensões. Graças à essa linguagem, o MATLAB pode ser programado, o que facilita enormemente a vida do pesquisador que o usa, já que a sua linguagem é mais simples do que uma linguagem de alto nível, sem contar que as bibliotecas para processamento matemático já estão disponíveis.

As extensões estendem a capacidade do MATLAB para diversos campos, como por exemplo:

- Redes neurais;
- Computação paralela;
- Biologia Computacional;
- Estatística;
- Processamento de sinais;
- Processamento de imagens;
- Modelagem financeira.

Entre muitos outros.

Existem muitos outros programas livres que desempenham funções semelhantes ao MATLAB, como o FreeMat, o Octave, o Euler e o SciLab. Mesmo assim, há muito desenvolvimento em cima do MATLAB, como um projeto do Núcleo de Desenvolvimento Open Source e Interoperabilidade do LMS-Unicamp, que consiste em um conjunto de instruções para a instalação

do MATLAB em um ambiente com servidores Linux para o processamento paralelo [63]. Dessa forma é possível aumentar o desempenho do mesmo. Existe inclusive um compilador, MATCOM¹⁴, que traduz código gerado no MATLAB em C++.

2.3.2 Euler

O *Euler* (hoje em dia **Euler Mathematical Toolbox**, ou EuMathT) [64] é um pacote de análise numérica distribuído sob a licença GPL, e mantido por um grupo de desenvolvedores, principalmente da Universidade de Eichstätt, Alemanha. Tem versões para Windows e Linux, e guarda semelhanças com o MATLAB, incluindo recursos como gráficos em 2D e 3D, inclusive animados. A parte de matemática simbólica é feita usando o sistema desenvolvido pelo Maxima (seção 2.1.14).



Figura 2.8: Superfície plotada com o Euler.

2.3.3 FreeMat

O *FreeMat* [65] é um software distribuído sob a licença GPL, e o seu objetivo é ser um ambiente de análise e cálculo numérico, semelhante a ferramentas comerciais, como o MATLAB. Tem versões para Windows, Linux e Mac OS X.

Segundo os produtores, 95% do código escrito para ser interpretado no MATLAB roda sem problemas no FreeMat. O mesmo incorpora inovações como uma interface para programas em FORTRAN e C/C++, algoritmos paralelos e distribuídos (via a biblioteca MPI - seção 4.1.5.1), e capacidade de visualização em 3D.

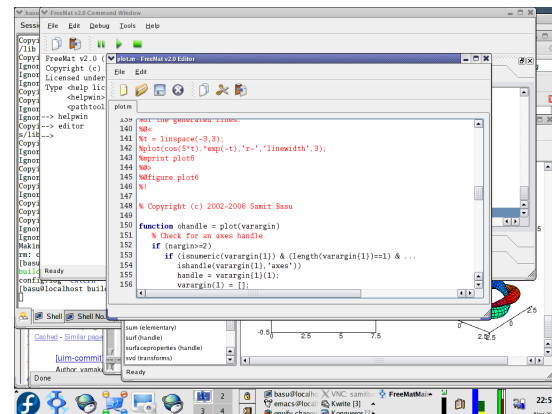


Figura 2.9: FreeMat.

2.3.4 NA Worksheet

O *NA Worksheet* [66] é um programa escrito em Java, liberado sob a licença livre GPL, e que traz diversas implementações para problemas de Análise Numérica, com a vantagem de centralizá-las num lugar só.

2.3.5 Octave

O *Octave* [67] é um software distribuído sob a licença GPL, que é um ambiente de análise de cálculo numérico, semelhante ao MATLAB. Foi inicialmente desenvolvido por pesquisadores das Universidades de Wisconsin-Madison e do Texas, para uso por estudantes de Engenharia Química, e hoje em dia faz parte do projeto GNU [?].

¹⁴MATCOM <http://www.mathtools.com/>

O Octave traz várias funcionalidades conhecidas: Interface em linha de comando, uma linguagem de programação interpretada, uso de bibliotecas escritas em outras linguagens (como C, C++ e FORTRAN), entre outras. Uma das funções úteis do Octave é a vantagem de aceitar os arquivos com extensão .m, criados pelo MATLAB. Logo, é pegar o seu programa feito no MATLAB e rodá-lo no Octave.

O Octave, por si só, segue a filosofia Unix, e deixa a interface para que outro programa o faça. Logo, existem alguns projetos relacionados ao mesmo, para estender as suas funcionalidades:

- Octave-Forge [68]: Repositório de extensões novas para o Octave.
- Octaviz (seção 3.3.9) e Octplot [69]: Ferramentas de plotagem e visualização.

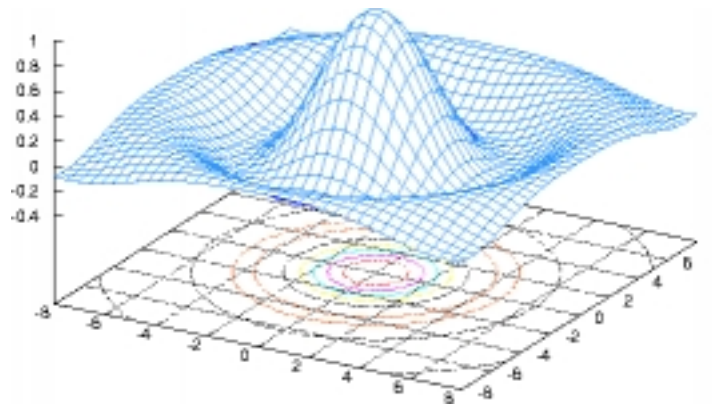


Figura 2.10: Octave.

2.3.6 Scilab

O *Scilab* [70] é mais um programa que segue a idéia do MATLAB, sendo tal qual o Octave e outros, uma solução em código aberto, licenciada sob a GPL, em versões para Linux, HP-UX e Windows. O Scilab teve seu desenvolvimento iniciado em 1994, e o Consórcio Scilab (com 25 membros) mantém o software desde 2003, hoje em dia com o apoio da empresa francesa DIGITEO [71].

Algumas das características mais interessantes do Scilab são:

- Integração com outras linguagens de programação, como FORTRAN, C, C++, Java e Tcl/Tk;
- Gráficos 2-D e 3-D, com animação;
- Extensões para a resolução de sistemas de equações diferenciais (explícitas e implícitas);
- Um simulador de sistemas dinâmicos híbridos usando diagramas de blocos;
- Capacidade de ser executado em paralelo, num cluster;
- Capacidade de trabalhar junto com ambientes de programação simbólica, como o Maple e o MuPAD.

Capítulo 3

Geometria e visualização

A beleza da Geometria está na visualização e no traçado das retas, curvas e superfícies que construímos, e nos estabelecimento das relações geométricas entre esses entes criados. Só que aí reside também o conflito, expresso por muitos estudantes e mesmo alguns pesquisadores: Não é claro como as relações geométricas são mantidas, nem como certas superfícies são desenhadas. Nisso reside o auxílio do computador. Nesse capítulo, vamos ver alguns softwares criados para facilitar o trabalho com esse belo campo da Matemática.

3.1 Geometria fractal

A geometria fractal é uma parte da geometria não-euclidiana, que estuda o comportamento e as propriedades das estruturas chamadas fractais. Os fractais são objetos geométricos tem o que chamamos *auto-similaridade*: Podem ser divididos em partes, e cada uma das quais ser semelhante ao objeto original. Essas partes são independentes de escala.

Além de gerarem figuras intrigantes e belas (do ponto de vista estético), os fractais podem ser pensados como maneiras de modelar a natureza, de uma forma mais próxima da realidade: Não podemos imaginar uma montanha simplesmente como uma seção de um cone geométrico, ou o mar como um plano. Ou seja, a geometria euclidiana é muito pobre para modelar a natureza. Existem programas para plotagem e estudo dos fractais, vistos que são gerados, na sua maioria, por processos iterados. Como são necessárias muitas iterações (da ordem de milhares), o estudo é inviável, a não ser que seja usado um software para isso.

3.1.1 Endlos

O *Endlos* [72] é um gerador de fractais escrito em Java, liberado sob a licença GPL. Pode ser executado em quaisquer plataformas onde tenhamos uma máquina virtual Java (JVM). Podemos citar então: Linux, Solaris, Mac OS X, FreeBSD, HP-UX, AIX, OS/2, Amiga OS, BeOS, Windows, dentre tantas outras.

Algumas das características são:

- Otimizado para precisão de 64 bits.

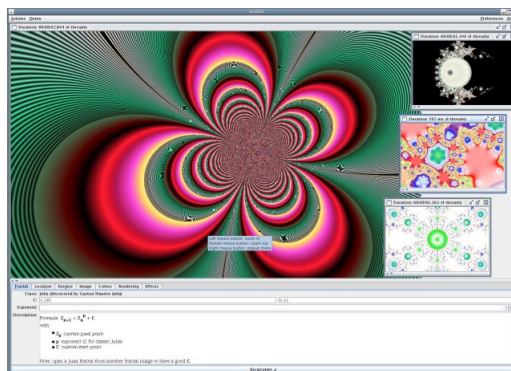


Figura 3.1: Endlos.

- Efeitos de colorização, com mais de 1600 mapas de cores disponíveis.
- Vários modos de desenho do fractal: ponto, linha, bloco ou o fractal completo.
- Capacidade de ampliação.
- Fórmulas flexíveis.
- Salva o resultado em vários formatos de imagem: PNG, JPG, BMP, etc.

Alguns, em particular, são bem interessantes:

- Capacidade de calcular vários fractais simultaneamente.
- O uso de threads para acelerar o cálculo em processadores dual e quad-core.
- Precisão ilimitada.
- Possibilidade de ajustar a quantidade de carga do processador que será usada para a geração do fractal.
- Leitura e gravação das características do fractal num arquivo no formato XML.
- Pós-processamento da imagem gerada.
- Opção de tocar músicas no formato MIDI enquanto expõe a criação do fractal.

Uma das características mais interessantes desse programa é a sua portabilidade: Sendo feito em Java, pode ser executado facilmente em qualquer plataforma. Também, por ter o código aberto, pode ter as suas características estendidas facilmente, basta programá-las.

3.1.2 Fractint

O *Fractint* [73] é o decano dos geradores de fractais, com cerca de 20 anos de idade: Seu projeto iniciou-se em 1988. Ele está atualmente na versão 20.0, e foi o primeiro a ter vários dos recursos nos quais outros geradores tem hoje em dia. Ele é liberado segundo uma licença freeware (com o código-fonte disponível), e tem versões para as plataformas DOS, Windows e Linux. A interface não é intuitiva, usando atalhos de teclas para obter o item desejado, e os gráficos carecem de recursos para geração, como anti-aliasing. Mas ainda assim merece ser citado, pela sua longevidade.

3.1.3 Eyefract e GLfract

O *Eyefract* [74] é um programa simples para geração de fractais, que dá um bom controle sobre a geração dos mesmos. Segundo o autor, ele pode gerar fractais além dos mais comuns. Tem um conjunto de características semelhantes ao *Fractint*, mas para instalar, é necessário compilá-lo: Não há pacotes disponíveis para as distribuições mais populares.

O *GLfract* [75] funciona em parceria com o *Eyefract*, pegando os arquivos gerados pelo segundo e plotando-os no espaço tridimensional (como mapas de altura), usando a biblioteca OpenGL [76]. Tem suporte a mouse e comandos do teclado, além de poder, por exemplo, reposicionar a câmera, e o ângulo de visão.

3.1.4 Fyre

O *Fyre* [77] é um programa gerador de fractais, liberado sob uma licença livre, para Windows e Linux. Em particular, tem ênfase no desenho de fractais em 3D.

3.1.5 Glito

O *Glito* [78] é um programa específico para explorar um tipo de fractal, os do tipo IFS (Iterated Function Systems, ou Sistemas de Funções Iteradas). As funções do tipo IFS mais comuns são a curva de Koch [79] e o triângulo de Sierpinski [?]. Ele está liberado sob uma licença livre, a GPL, e usa a biblioteca FLTK¹ para gerar a interface gráfica.

¹FLTK, ou Fast Light ToolKit <http://www.fltk.org>

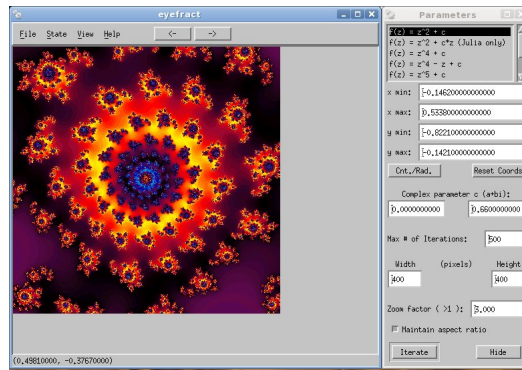


Figura 3.2: EyeFract.

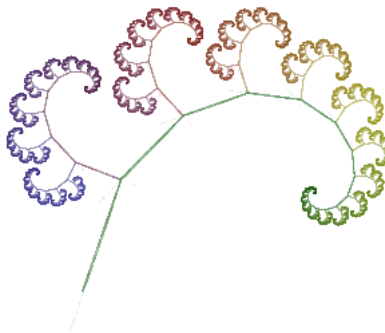


Figura 3.3: Um fractal do tipo IFS gerado pelo GItto.

3.1.6 Gnofract 4D

O *Gnofract 4D* [81] segue o mesmo perfil da maioria dos softwares aqui relacionados: Licença livre (GPL), plataforma Unix (Linux, FreeBSD e Mac OS X), e é um gerador de fractais. Aqui, o Gnofract 4D é um programa bem integrado ao ambiente GNOME², e segundo os desenvolvedores, ele é um dos melhores geradores de fractais disponíveis para download. Segundo os próprios, ele é rápido, estável, tem uma interface moderna com o usuário, e vários downloads.

O nome "4D" vem da forma com o qual ele encara os conjuntos de fractais, do tipo Mandelbrot e Julia, percebendo-os como diferentes visões do mesmo fractal de quatro dimensões. A idéia é que podemos criar intersecções de dois conjuntos, e observar essas relações. Não conheço outro programa que permita essa possibilidade.

Outras características relevantes são a possibilidade de importação de fórmulas vindas de outros programas, como o Fractint; o uso mais eficiente das UCPs atuais (multithread, dual e quad-core) para acelerar os cálculos; muitas opções para alterar os fractais a serem desenhados; opções como *anti-aliasing* e gradientes suaves para gerar uma melhor saída na imagem.

O Gnofract 4D está disponível para instalação em alguns repositórios de distribuições, como o Fedora Extras, por exemplo, o que torna a sua instalação fácil para os usuários dessa distribuição.

3.1.7 XaoS

O *XaoS* [82] é um programa cuja ênfase é explorar fractais, ampliando continuamente o traço, para dessa forma encontrar as suas auto-similaridades. A sua licença é livre, e há versões para Windows, Linux e outros "sabores" de Unix.

3.2 Geometria Computacional

Um grande problema com a Geometria Euclidiana e Não-Euclidiana, principalmente para o ensino, é tornar o conteúdo mais interativo para o aluno. Alguns programas, como o Cabri Geometry [83], são conhecidos por auxiliarem o entendimento da

²GNOME <http://www.gnome.org>

Geometria Euclidiana Plana e Espacial para os estudantes. Mas são soluções pagas, e na sua maioria para Windows. Nossa ênfase está em soluções para ambiente Linux, preferencialmente livres.

Numa rápida pesquisa, encontramos uma lista com aproximadamente trinta programas³. Logo, veremos algumas.

3.2.1 Archimedes Geo3D

O *Archimedes Geo3D* [84] é um programa de geometria dinâmica, com ênfase em geometria espacial, liberado sob uma licença comercial, do tipo shareware, e com versões para Windows, Linux e Mac OS X.

No Archimedes é possível construir objetos como pontos, linhas, esferas, planos, triângulos, entre outros, construir intersecções entre esses objetos geométricos, e movê-los, vendo as primitivas geométricas manterem-se mesmo alterando toda a construção.

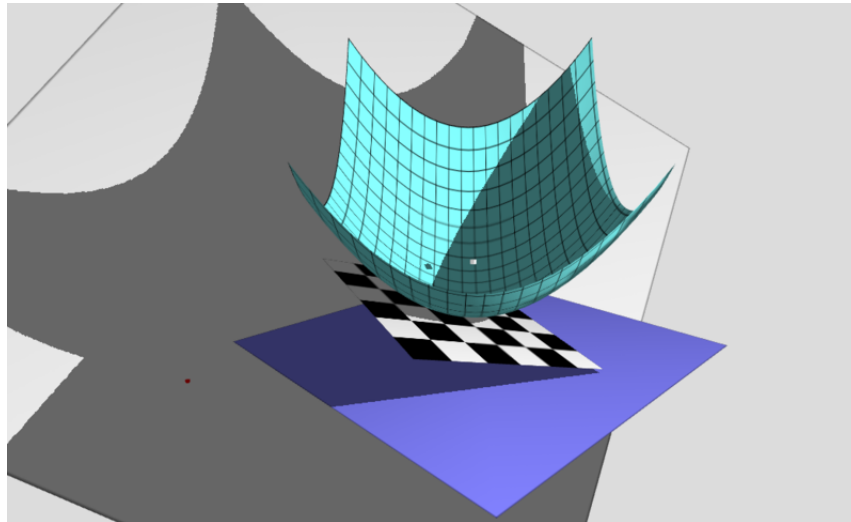


Figura 3.4: Archimedes Geo3D.

3.2.2 Axel

O *Axel* [85] é um software de modelagem geométrica com versões para Linux e Mac OS X. Seu foco é prover ferramentas de modelagem algébrica para a manipulação e computação com curvas e superfícies paramétricas e implícitas. Ele é capaz de lidar de computar a topologia, a intersecção e as singularidades de curvas e superfícies, além da modelagem diferencial, com curvas e superfícies derivadas.

O Axel é fruto do trabalho do grupo Galaad⁴, da INRIA⁵, sediado na França, e é liberado segundo uma licença livre (embora não esteja clara qual é). Existe uma ramificação, o VrAxel⁶, cuja ênfase é em visualização tridimensional.

3.2.3 C. a R.

O **C. a R.** (**Compass and Ruler** - Compasso e Régua) [86] é um programa interativo de geometria, escrito em Java, e usado para aprendizado em Geometrias Euclidiana e Não-Euclidiana. O desenvolvedor que iniciou o projeto em 1989, Rene Grothmann, é professor da Universidade Católica de Eichstätt, Alemanha. O C. a. R. é liberado sob a licença GPL, e tem versões para Windows, Mac OS X e Linux. Existem versões dele em cerca de 20 idiomas, sendo que a página de ajuda de contexto do programa já está traduzido para 10 desses idiomas.

A idéia é que ele simule compasso e régua na tela do computador, mas trazendo mais recursos, como o uso de macros para construções mais complexas. O C. a. R. tem como diferencial a possibilidade de criar "lições", a serem feitas pelos alunos, o que é ótimo para professores criarem exercícios.

Há uma variação do C. a. R., o *CaRMetal* [87], que na essência é o mesmo programa, só que com nova interface com o usuário.

³Lista de programas: <http://tinyurl.com/49karm>

⁴Galaad <http://www-sop.inria.fr/galaad/>

⁵INRIA = Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique

⁶<http://axel.inria.fr/vr>

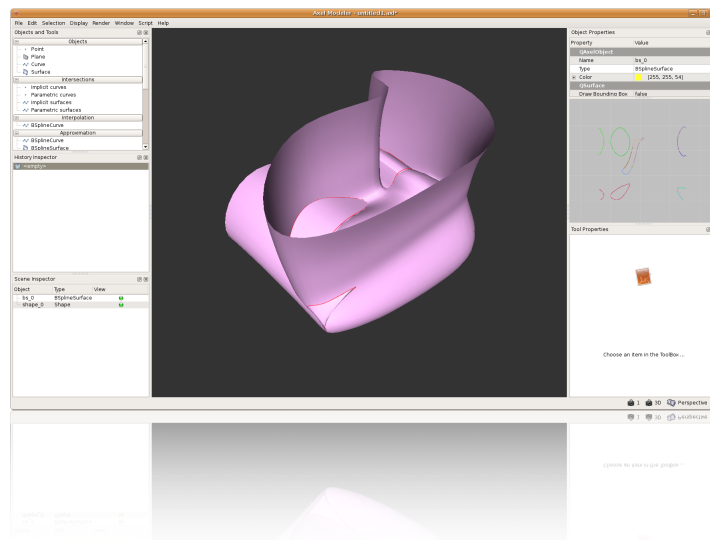


Figura 3.5: Superfície parametrizada gerada com o Axel.

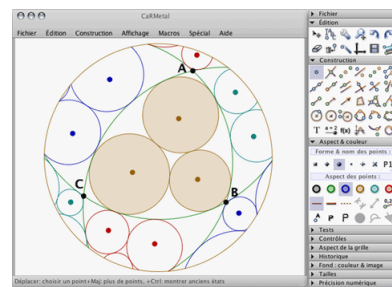
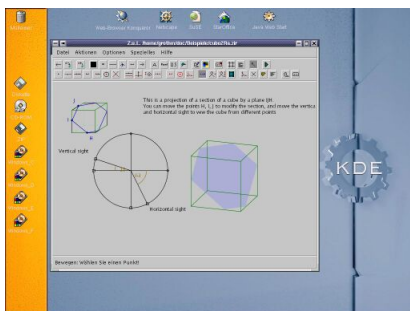


Figura 3.6: C. a R. e o CaRMetal.

3.2.4 Cinderella

O *Cinderella* [88] é um software para geometria dinâmica, escrito em Java, e liberado sob uma licença comercial (Extended Campus License). Ele tem versões para Windows, Mac OS X e Linux, com uma versão também disponível em português (de Portugal).

Na nova versão (2.0), ele inclui um gerador de simulações físicas e uma linguagem de programação funcional, a CindyScript, no qual pode-se estender as funcionalidades do programa.

Alguns dos exemplos no site demonstram o uso dele para outros campos do conhecimento, como Mecânica dos Corpos, Atração Gravitacional, Geometrias Fractal, Projetiva, Hiperbólica, e também Cálculo Diferencial e Integral.

3.2.5 Dr. Geo

O *Dr. Geo* [89] é um programa interativo de geometria, liberado sob uma licença livre, a GPL. Ele tem versões para Mac OS X e Linux, e é baseado na biblioteca GTK+⁷.

O Dr. Geo é mais focado em estudantes do ensino fundamental (7 a 15 anos), e tem como pontos fortes a interface customizável, suporte a vários idiomas e o uso de uma macro-linguagem de programação, para traçar um objeto geométrico.

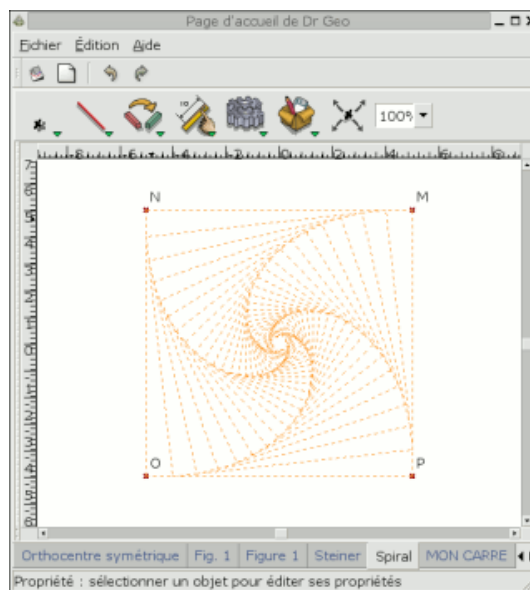


Figura 3.7: Dr. Geo.

3.2.6 Eukleides

O *Eukleides* [90] é um programa interativo de geometria, liberado sob uma licença livre, a GPL. Ele tem versões para Windows, Mac OS X e Linux. Seu foco, como diz o nome é a Geometria Euclidiana.

Na prática, são dois softwares:

- O primeiro, *eukleides*, é um compilador, que permite você descrever uma figura geométrica, gerá-la e inserí-la num documento (La)T_EX. Ele também pode ser usado para converter figuras no formato Encapsulated PostScript (EPS) para outros formatos vetoriais de imagem.
- O segundo, *xeukleides*, é um *front-end* gráfico para o primeiro, tornando possível criar figuras geométricas interativas, assim como editar e refinar o código escrito para ser compilado pelo *eukleides*.

⁷GTK Toolkit <http://www.gtk.org>

3.2.7 Gambol

O *Gambol* [91] é um sistema de desenho baseado em construção, liberado sob uma licença GPL, e com versões para as plataformas Windows, Mac OS X e Linux. Ele tem versões em C++ e Java, e é altamente portátil: Levá-lo para uma nova plataforma é razoavelmente simples, visto que ele pode usar várias bibliotecas gráficas. Basta poucas adaptações e recompilar o código. O seu foco é a Geometria Euclidiana, e algumas das características são:

- Construção intuitiva, usando a interface gráfica;
- Separação entre a interface gráfica e o software de geometria, o que facilita a portabilidade.

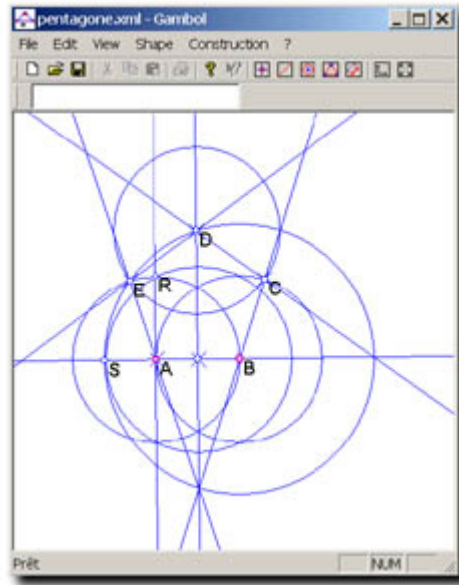


Figura 3.8: Gambol.

3.2.8 Geogebra

O *Geogebra* [92] é um premiado programa de geometria interativa, escrito em Java e liberado sob uma licença GPL. Existem versões para as plataformas Windows, Mac OS X e Linux. Seu foco é o educacional, já que pode reunir problemas de geometria, álgebra linear e cálculo (derivação e integração simbólica). Por um lado, podemos construir figuras geométricas livremente, com o uso do mouse. Mas também equações podem ser inseridas com o teclado, assim como coordenadas. O Geogebra está disponível em 35 idiomas diferentes.

O site do Geogebra tem uma wiki ⁸ com muito material para ensino disponível, como por exemplo:

- Ângulos inscritos em círculos.
- Teorema da soma dos ângulos do triângulo.
- Visualização do domínio de uma função.

Entre vários outros.

3.2.9 Geometry Expressions

O *Geometry Expressions* [93] é um programa de geometria simbólica, liberado sob uma licença comercial com versões para Windows, Mac OS X e Linux. Segundo os autores, ele é o primeiro de todos, compatível com o Mathematica [35]. Ele difere dos outros por descrever as figuras geométricas como restrições simbólicas ou lugares numéricos. As medidas no desenho são expressas como grandezas numéricas, mas também simbolicamente, através de expressões matemáticas. O Geometry Expressions também pode ser usado em conjunção com um sistema de álgebra, através da linguagem de marcação MathML.

⁸Wiki: <http://www.geogebra.org/en/wiki/index.php/English>

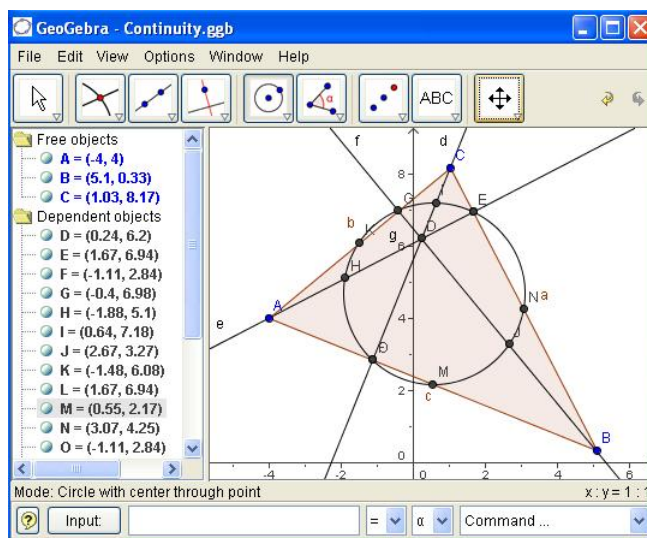


Figura 3.9: Geogebra.

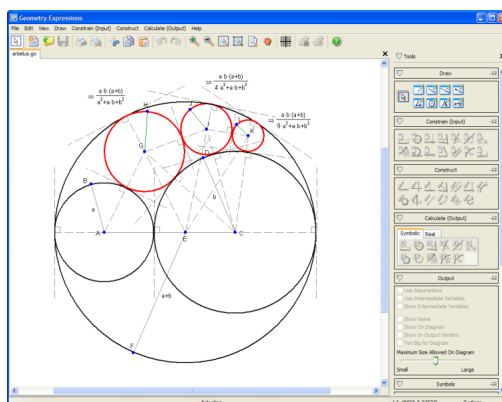


Figura 3.10: Geometry Expressions.

3.2.10 Geomview

O *Geomview* [94] é um software cuja proposta é ser um visualizador tridimensional interativo para sistemas Unix. Devido à sua estrutura, ele pode ser usado isoladamente, como um visualizador simples, ou como um software para geometria dinâmica, onde outros softwares geram a geometria dinamicamente, e ele expõe. O Geomview pode exportar a imagem em vários formatos, e está liberado segundo a licença livre GPL. Ele também pode ser compilado e executado sob ambiente Windows, com o auxílio da biblioteca Cygwin⁹, mas seu foco é o ambiente Unix, onde existem versões pré-compiladas para Linux e Mac OS X.



Figura 3.11: Geomview.

3.2.11 Geoproof

O *Geoproof* [95] é um programa de geometria dinâmica, liberado sob uma licença livre (GPL) com versão no site para Windows, e escrito na linguagem de programação Ocaml por Julien Marboux. Ele difere dos outros por usar precisão arbitrária nas suas computações; ser capaz de provar alguns teoremas automaticamente. Outros teoremas podem ser provados em conexão com outro software, o Coq proof assistant [96], francês.

As versões para Mac OS X e Linux aparentemente não estão sendo mais mantidas pelo desenvolvedor, mas o código-fonte está disponível, como é requerido pela licença.

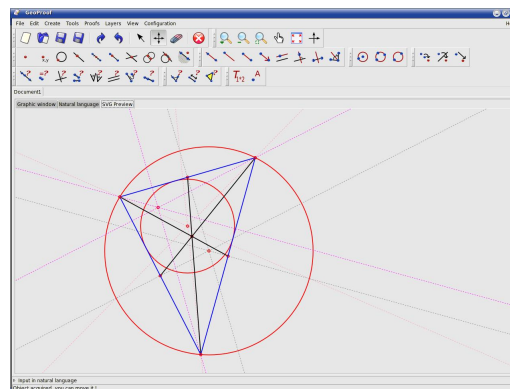


Figura 3.12: Geoproof.

⁹Cygwin <http://www.cygwin.com/>

3.2.12 GEX

O *GEX (Geometry Expert)* [97] é um software de geometria simbólica, liberado sob uma licença livre, (GPL) com versões para Windows, Mac OS X e Linux. O GEX é desenvolvido na linguagem de programação Java. O seu desenvolvimento está a cargo de um grupo de pesquisadores chineses, e a sua ênfase está em demonstração, usando, segundo os autores, "os melhores métodos de dedução geométrica desenvolvidos nos últimos vinte anos".

A proposta do GEX é ser um software que consiga provar automaticamente teoremas geométricos, descobrir novas propriedades de teoremas, e gerar provas legíveis para os mesmos. No site do projeto, temos ligações para uma versão voltada para a Internet (Java GEX), e para uma nova versão do GEX, o MMP/Geometer, que é capaz de montar automaticamente construções geométricas.

3.2.13 iGeom

O *iGeom* [98] é um software para geometria dinâmica, escrito em Java, e liberado sob uma licença gratuita (mas não livre). Ele tem versões para Windows, Mac OS X e Linux, e é desenvolvido na Universidade de São Paulo (USP). O site não tem atualizações desde 2002, mas o programa tem opções como:

1. O uso de scripts, para explorar conceitos de programação e criar trabalhos com algoritmos geométricos, fractais, entre outros.
2. Capacidade de gerar páginas na Web com o conteúdo criado, assim como promover avaliações, o que ajuda muito o trabalho do professor, inclusive gerando uma estrutura de controle para os alunos: Quantos fizeram quais exercícios, quais as soluções apresentadas por eles, etc.

3.2.14 Kaleido

O *Kaleido* [99] é um software de geometria e visualização tridimensional cujo foco é trabalhar com poliedros uniformes (aqueles cujas faces são regulares e os vértices, equivalente). Mais especificamente, ele é capaz de computar as propriedades métricas dos poliedros, como ângulos e raio, assim como o número característico de Euler, e a densidade de cobertura. Também gera coordenadas cartesianas para os vértices e faces, e transforma o desenho, de uma grade de arames, numa superfície sólida.

O Kaleido foi feito para uso em máquinas com sistemas padrão Unix, mas pode ser usado em sistemas MS-DOS. Ele pode ser portado para outros sistemas computacionais, já que o código-fonte está disponível, embora a licença não esteja claramente especificada. Um dos possíveis usos para esse software são a geração de modelos de realidade virtual para uso com a linguagem VRML (especificação VRML97). Ele foi desenvolvido no Instituto de Tecnologia de Israel (Technion), e parte dos algoritmos já foram portados para uso na linguagem de programação do software Mathematica (seção 2.1.12).

3.2.15 Kig

O *Kig* [100] é um software de geometria interativa, liberado sobre a licença GPL, e desenvolvido para substituir o software Kgeo. Há versões dele para Windows, Mac OS X e Linux. Ele faz parte da seção educacional do projeto KDE Educacional, do KDE e. V.. O Kig foi feito com dois objetivos em mente:

- Permitir que estudantes explorem conceitos figuras matemáticas interativamente;
- Ser uma ferramenta para desenhar figuras matemáticas, e poder exportá-las para outros formatos e documentos.

Sua meta é ser capaz de substituir com folga programas como o Dr. Geo, o KSeg, e o Cabri. Está na versão 1.0, e é programável via a linguagem de programação Python.

3.2.16 KSEG

O *KSEG* [101] é um programa interativo de geometria, liberado sob uma licença livre, a GPL. Ele é nativo do Linux, e é parte do ambiente KDE¹⁰, e sua proposta é explorar a geometria euclidiana. Seu foco é mais a sala de aula, onde o uso de régua, compasso e esquadros deixa o ensino enfadonho para os alunos. Algumas das características do KSEG são:

- Suporte a macros.

¹⁰K Desktop Environment <http://www.kde.org>

- Construção (pontos, segmentos, raios, círculos, arcos, polígonos, etc.).
- Medidas e transformações.
- Suporte a macros, inclusive com recursividade.
- Gerar figuras no formato \LaTeX .

3.2.17 OpenEuclide

O *OpenEuclide* [102] é um software interativo de geometria bidimensional (2D), liberado sob uma licença GPL, e com versões para as plataformas Windows e Linux, com prioridade na última plataforma.

3.3 Visualização e plotagem

Uma categoria de softwares relacionados à matemática são aqueles que visam a geração de resultados de forma gráfica. São softwares de plotagem, que permitem, na sua maioria, gerar um resultado visual de uma tabela, uma equação (ou um conjunto delas), lançando mão de duas ou três dimensões. Vamos a alguns deles:

3.3.1 Easy Funktion

O *Easy Funktion* [103] é um software alemão de plotagem de gráficos em duas dimensões, e que traz a ele acoplado um resolutor de equações. Ele é liberado segundo a licença GPL, tem uma calculadora, e é capaz de lidar inclusive com números complexos.

O *Easy Funktion* traz algumas extensões interessantes, como cálculos de impedância de capacitores e indutores para eletrônica, e a função de exportar para planilhas de cálculo os resultados obtidos. Ele está liberado sob a licença GPL, e disponível para download.

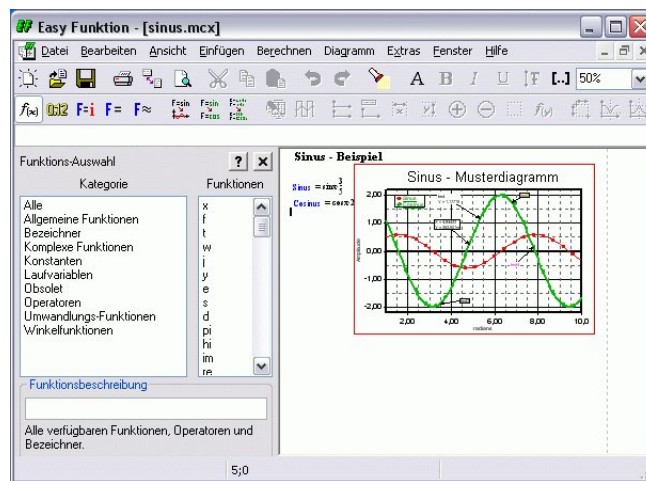


Figura 3.13: Easy Funktion.

3.3.2 Fplot

O *fplot* [104] é um programa de plotagem, com o código-fonte disponível (mas não claramente liberado segundo uma licença livre), e que é bem simples: Sua entrada é um arquivo-texto, com os resultados, e a saída é um gráfico no formato Postscript, pronto para ser impresso. O *fplot* tem a opção de receber comandos para aperfeiçoar a geração do gráfico: legendas, estilos de linha, marcadores nos eixos X e Y, entre outros.

Em particular, usei o *fplot* em 1999, para os gráficos da minha tese de mestrado, a saber, “Um método de elementos finitos para o sistema axissimétrico de Stokes em três campos usando elementos triangulares” [105]. É um programa simples, mas que cumpre ao que se propõe.

3.3.3 Gnuplot

O *Gnuplot* [106] é o decano dos softwares de plotagem e visualização. Ele é gratuito, mas apesar do nome, não é liberado sob uma licença livre endossada pela FSF¹¹. Não há restrições quanto ao seu uso, e também nenhuma garantia. O *Gnuplot* tem versões para as plataformas Linux, Unix (BSD, HP-UX, AIX, etc.), VMS, Ultrix, OS/2, DOS, Amiga, OS-9/68k, Atari ST, BeOS, Windows, Mac OS X e System 8, entre tantas outras.

Seu desenvolvimento iniciou-se há mais de 20 anos (1986), e sua meta inicial é permitir que estudantes e pesquisadores vejam dados e funções matemáticas na forma de gráficos. Hoje em dia, pode ser usado para vários usos, inclusive não-interativos: De scripts que geram resultados via Web a integração com ferramentas como o Octave (seção 2.3.5) e o SAGE (seção 2.1.21).

A saída pode ser feita diretamente para impressoras e plotters, e em diferentes formatos de arquivos, vetoriais (SVG, Metafont, EMF, $\text{T}_\text{E}\text{X}$, $\text{L}_\text{A}\text{T}_\text{E}\text{X}$, PDF, EPS, etc) e rasterizados (PNG, JPEG, FIG, PBM, etc). Existem algumas interfaces gráficas para o *Gnuplot*, mas sempre há disponível a interface em modo texto. Muito material a respeito do *Gnuplot* está disponível: artigos, tutoriais, livros, exemplos, demonstrações e muitas imagens.

3.3.4 Grace

O *Grace* [107] é um software de plotagem em 2D liberado sob uma licença livre (GPL) para o ambiente X-Windows, com a biblioteca Motif [116] (ou semelhante, como a LessTif¹²). Logo, ele pode ser recompilado sem problemas para qualquer sistema operacional baseado em Unix, além de ter sido portado para as plataformas VMS, OS/2 e Windows. O *Grace* foi desenvolvido em Israel, e é descendente de outro software, o ACE/gr [108].

Diferente do *Gnuplot* e de outros, o *Grace* não só gera o gráfico e o exporta em vários formatos (EPS, PS, PDF, MIF, SVG, PNG, PNM, JPEG), mas tem outras características peculiares, como:

- Ajuste de curvas, usando o método dos mínimos quadrados, de forma linear e não-linear, com vários recursos.
- Capacidade de análise, usando métodos como a transformada rápida de Fourier (FFT), splines, interpolação, convolução, correção, covariação, diferenciação e integração.
- Linguagem de programação própria, permitindo a criação de macros.
- Carregamento de módulos dinamicamente - o usuário pode escrever seu próprio módulo (em C, FORTRAN ou em outra linguagem).

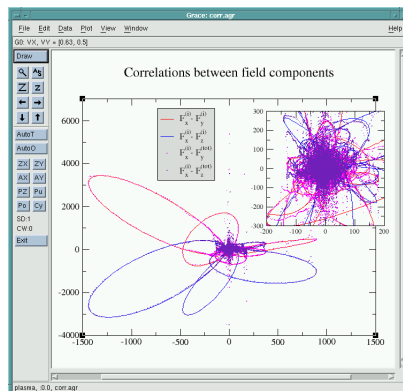


Figura 3.14: Grace.

3.3.5 KAlgebra

O *KAlgebra* [109] é um software distribuído sob a licença GPL, com versões para Windows, Mac OS X e Linux, e é parte do Projeto KDE Educacional¹³, do KDE e. V.. Ele é uma calculadora matemática, cuja estrutura de programação é baseada na linguagem de marcação MathML¹⁴, embora não seja necessário saber MathML para usá-lo. Embora a sua ênfase seja em cálculo, ele também é capaz de gerar plotagens de gráficos.

¹¹Free Software Foundation, ou Fundação do Software Livre <http://www.fsf.org>

¹²LessTif <http://www.lesstif.org/>

¹³KDE Educacional <http://edu.kde.org/>

¹⁴MathML <http://www.w3.org/Math/>

3.3.6 KmPlot

O *KmPlot* [110] é um software distribuído sob a licença GPL, com versões para Windows, Mac OS X e Linux, e é parte do Projeto KDE Educacional, do KDE e. V.. Sua função é semelhante ao *KAlgebra* (seção 3.3.5), só que a sua ênfase é plotagem de gráficos, com algumas características, como:

- A possibilidade de traçar diferentes gráficos simultaneamente;
- Combinar os termos de vários gráficos de forma a obter novos.

O *KmPlot* não permite a análise desses gráficos.

3.3.7 LabPlot

O *LabPlot* [111] é um software desenvolvido na Alemanha, e distribuído sob a licença GPL, com versões para Windows, Mac OS X e Linux. O *LabPlot* é escrito tomando como base a biblioteca Qt, usada no Projeto KDE. Semelhante ao *KmPlot* (seção 3.3.6), sua ênfase é em plotar gráficos em duas e três dimensões. Algumas das suas características são:

- Capacidade de importar dados em vários formatos (incluindo hdf5, cdf, áudio, binário e imagens).
- Capacidade de ler mais de 80 formatos de imagens, e dados em forma compactada.
- Suporte à GNU Scientific Library (GSL).
- Criação de gráficos em 2 e 3 dimensões, uso de coordenadas polares, superfícies, entre outros tipos.
- Média, análise periódica, localização de picos nos gráficos.
- Interpolação, diferenciação, integração.
- Histograma e regressão (até a décima ordem).
- Regressão não-linear para qualquer função até nove parâmetros.
- Transformadas de Fourier, Laplace, Hankel, além de wavelets.
- Importação de dados a partir de bancos de dados (PostgreSQL e MySQL), e os projetos do software Origin [112].

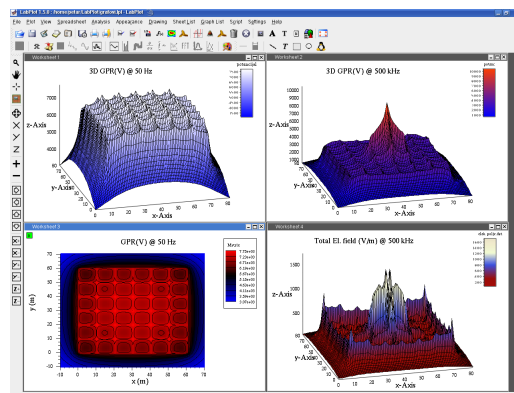


Figura 3.15: LabPlot

3.3.8 MayaVi2

O *MayaVi2* [113] é um software usado para visualização de dados científicos, cuja ênfase é ser livre e de fácil uso. Seu código está liberado sob uma licença livre (GPL), e tem versões para as plataformas Windows, Mac OS X e Linux. O *MayaVi2* está escrito em Python, usando a biblioteca VTK¹⁵ para visualização. Sua interface gráfica usa a biblioteca TkInter¹⁶, logo torna-se fácil a sua portabilidade para outras arquiteturas e plataformas: Basta ter as dependências satisfeitas (interpretador Python, bibliotecas VTK e TkInter) e pronto.

O *MayaVi2* é voltado para visualização, e uma das suas características mais interessantes é que ele pode ser importado como um módulo Python por outros programas escritos na mesma linguagem. Logo, ele pode ser usado como se fosse uma biblioteca por outros programas semelhantes. Outras características que o diferenciam são:

- Importação de arquivos no formato 3DS (do 3D Studio), ou VRML.
- Exportação do resultado em arquivos no formatos OOGL, OBJ e RIB (usados nos programas Geomview, Wavefront e Renderman).
- Recursos de renderização 3D, como iluminação, uso de raycasting e outros.

Logo, ele pode ser empregado em projetos que requeiram Computação Gráfica, e necessitam de um programa para criar a visualização de um fenômeno.

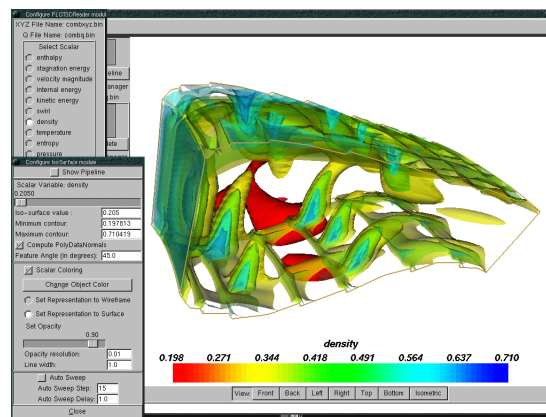


Figura 3.16: MayaVi2

3.3.9 Octaviz

O *Octaviz* [114] é um sistema de visualização 3D para o Octave (seção 2.3.5), licenciado sob a GPL, que integra o VTK (Visualization Toolkit) ao primeiro.

3.3.10 OpenDX

O *OpenDX* [115] é um software liberado sob uma licença livre, cujo foco está em visualização. Ele é a versão livre do Visualization Data Explorer, da IBM, e desenvolvido para uso em ambiente X-Windows, com a biblioteca OSF/Motif [116]. Logo, já versões dele para várias plataformas Unix (SGI Irix, HP-UX, Linux, Solaris), Mac OS X e Windows. Como é derivado de um software comercial, herdou todas as funcionalidades, e tem uso muito amplo em diversos campos da ciência, inclusive matemática.

3.3.11 QtPlot

O *QtPlot* [117] é um software liberado sob uma licença livre (GPL), e tem versões para as plataformas Windows, Mac OS X e Linux. A sua meta é ser um software livre, alternativo aos pacotes pagos, como o Origin. Algumas características são:

¹⁵VTK = Visualization ToolKit <http://www.vtk.org/>

¹⁶TkInter <http://wiki.python.org/moin/TkInter>

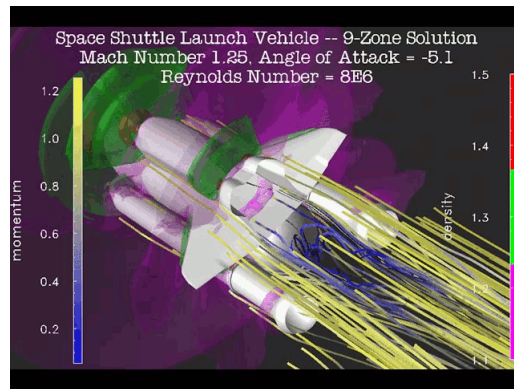


Figura 3.17: OpenDX.

- Plotagem em três dimensões usando a biblioteca OpenGL [76].
- Exportação em diversos formatos, vetoriais e rasterizados.
- Importação e exportação de arquivos-texto.
- Regressão linear e não-linear, aproximação pelo método dos mínimos quadrados, ou o algoritmo de minimização simplex.
- Possibilidade de usar a linguagem Python dentro do QtiPlot, com o objetivo de facilitar a criação de ferramentas que o usem.
- Rotinas de análise de dados: Estatísticas, ordenação, Transformada Rápida de Fourier, suavização dos dados, filtragem, convolução/deconvolução, correlação, interpolação, integração e diferenciação numérica, etc.
- Importa arquivos do Origin.

Capítulo 4

Bibliotecas de programação e outros

4.1 Bibliotecas de programação

Todo projeto de software surge inicialmente como uma "coceira" de alguém, uma coceira muito específica que nenhuma outra solução pode resolver. Logo, muitas vezes a solução é o desenvolvedor escrever código-fonte, fazer o seu programa para resolver o seu problema específico.

Reinventar a roda não é uma opção aceitável hoje em dia. Afinal, "tempo é dinheiro", e ninguém quer perder tempo, principalmente se já tem algo pronto. As bibliotecas de programação vem ao encontro desses desenvolvedores, já com código pronto, testado e aprovado, de forma que fique mais fácil escrever o seu programa, lançando mão do trabalho de outros: *"Coletar dados é só o primeiro passo em direção à sabedoria. Mas compartilhar dados é o primeiro passo em direção à comunidade."*¹

Vamos ver então, algumas das bibliotecas de programação disponíveis para uso.

4.1.1 Álgebra Computacional

4.1.1.1 GiNaC

O *GiNaC* (**GiNaC is Not a CAS**) [118] é uma biblioteca de álgebra computacional, liberado segundo uma licença livre, a GPL, e que destaca-se por não ter uma interface rebuscada com o usuário. Pelo contrário, o usuário é incentivado a escrever o seu algoritmo simbólico diretamente em C++. Simbolicamente, ele pode trabalhar com aritmética polinomial multivariada, expansões de séries e matrizes, séries, álgebra de Lie, etc. A idéia é que o GiNaC seja ligado ao programa do usuário, e assim o usuário possa desenvolver código que resolva simbolicamente vários problemas matemáticos.

4.1.1.2 JACAL

O *JACAL* [119] é um programa liberado sobre a licença GPL, é parte do projeto GNU [120]. Ele é descrito como um programa para lidar interativamente com matemática simbólica: Álgebra e Cálculo, matrizes e tensores. O JACAL é escrito na linguagem interpretada conhecida como Scheme [121], e tem versões para Windows, Linux e Unix. No site tem alguns exemplos, como um artigo que mostra como usarmos o JACAL para resolução de equações diferenciais de primeira ordem.

4.1.1.3 LiDIA

O *LiDIA* [122] é um conjunto de bibliotecas, escrita em C++, desenvolvida para lidar com problemas de Teoria dos Números. Foi desenvolvido na Universidade de Tecnologia de Darmstadt, Alemanha, e está disponíveis segundo uma licença livre para uso não-comercial (embora a mesma não esteja especificada).

Seu conjunto de bibliotecas abrange: Grupos finitos, álgebra linear, grupos numéricos, curvas elípticas, fatorização, polinômios, entre outros. A documentação é grande (mais de 700 páginas), com exemplos, como usar, filosofia, etc. Como são bibliotecas, podem ser usadas em qualquer ambiente operacional que siga a especificação do comitê POSIX ([15]), mas os autores certificam que o código já foi devidamente testado em plataformas Linux (x86) e Solaris (SPARC).

¹Frase citada em um dos comerciais da IBM sobre o Linux, veiculados na televisão estadunidense <http://www.youtube.com/watch?v=zzvDSw0A96s>

4.1.1.4 NZMATH

O *NZMATH* [123] é um pacote de matemática voltado à Teoria dos Números, desenvolvido pela equipe que originalmente desenvolveu o *SIMATH*, um sistema escrito em C e que pertence à empresa alemã Siemens. Como este tem limitações quando ao licenciamento, a equipe desenvolveu o *NZMATH*. Ele é escrito em Python na Universidade Metropolitana de Tóquio, e distribuído segundo a licença BSD.

Logo, seu foco é ser o que o *SIMATH* é: ter uma calculadora interativa (*simcalc*), e funções para lidar com estruturas algébricas como números inteiros longos, números racionais e em ponto flutuante, polinômios, grupos de Galois, matrizes, curvas elípticas, grupos algébricos, entre outros.

4.1.1.5 SymbolicC++

O *SymbolicC++* [124] é uma biblioteca, escrita em C++, que usa programação orientada a objeto para desenvolver um sistema de álgebra computacional (CAS). Essa biblioteca está liberada segundo a licença livre GPL, e tem algumas características, como a quantidade de tipos de dados com os quais pode-se trabalhar: inteiros muito grandes, racionais, números complexos, vetores, matrizes, polinômios, equações, derivações, entre outros.

Algumas das vantagens apontadas são inerentes ao modelo de desenvolvimento, de programação orientada a objetos. Como o código-fonte é aberto, o sistema é independente de arquiteturas: Basta ter um compilador C++ e compilar a biblioteca para essa nova arquitetura. Da mesma forma, expandir o código, criando novos tipos de dados, é possível e fácil. Outra característica interessante é que ele tem facilidades para integração com a biblioteca de passagem de mensagens PVM ([148]).

4.1.1.6 SYMMETRICA

O *SYMMETRICA* [125] é uma coleção de rotinas, escritas em C, com o objetivo do desenvolvedor ter ferramentas para desenvolver seus próprios programas, lidando com Teoria dos Grupos. Logo, ele lida com a representação de grupos: Clássicos, simétricos, finitos, etc., além de operações sobre eles. Ele está disponível em domínio público, e pode ser usado em sistemas Unix.

4.1.1.7 SymPy



Figura 4.1: SymPy.

A *SymPy* [126] é uma biblioteca Python para matemática simbólica. A meta é que ela torne-se uma meta-linguagem para álgebra computacional, funcionando sobre a linguagem Python. Ela é liberada sobre uma licença livre, e é toda escrita em Python, o que a dispensa de bibliotecas externas. Algumas das suas funcionalidades são:

- Aritmética básica e funções ($\exp(x)$, $\ln(x)$, etc).
- Simplificação e expansão de produtos notáveis.
- Números complexos.
- Derivação e séries de Taylor.
- Substituição e precisão arbitrária.

Existem módulos que expandem a sua capacidade, com funções trigonométricas, fatoriais, limites, integração indefinida, manipulação de polinômios (divisão, fatoração, etc), resolutores, matrizes simbólicas (decomposição LU), além de plotagem em duas e três dimensões e outros. O software SAGE (2.1.21) inclui o SymPy, além de bibliotecas para cálculo de problemas que podem ser resolvidos segundo o método dos elementos finitos, como a *symfe* [127].

4.1.1.8 SympyCore

O *SymPyCore* [128] é um projeto de pesquisa, escrito em Python e liberado segundo uma licença livre (nova licença BSD). Sua meta é procurar novas soluções de alto desempenho para representar e manipular expressões simbólicas na linguagem Python, e testar novos modelos simbólicos, de forma que seja possível compor no futuro um sistema de álgebra computacional.

Sua diferença, para o projeto SymPy ([126]) é o foco de atuação, e o que foi desenvolvido acaba retornando para o projeto original, na forma de melhorias e trocas de código. No futuro, pode-se pensar numa fusão entre os dois projetos.

4.1.2 Álgebra Linear e Análise Numérica

4.1.2.1 AMD Core Math Library

A *ACML* [129] é uma biblioteca organizada pela AMD² com rotinas matemáticas otimizadas para uso em sua família de processadores Opteron (para servidores). Está disponível para uso em Windows e Linux, pode ser usada com os compiladores GFORTRAN, Intel Fortran, NAG, PathScale, PGI e Sun Studio. A licença é proprietária. Os componentes principais são:

1. Uma implementação dos três níveis da biblioteca BLAS (seção [131]), otimizada para os processadores AMD Opteron;
2. Um conjunto de rotinas oriundas do LAPACK (seção [134]), também otimizadas;
3. Um conjunto de rotinas para calcular a Transformada Rápida de Fourier (seção 4.1.4), lidando com números em precisão simples e dupla, real e complexa;
4. Um conjunto de rotinas para manipular matrizes, vetores e escalares, otimizados para os AMD Opteron;
5. Geradores de números aleatórios em precisão simples e dupla.

4.1.2.2 ATLAS

O *ATLAS (Automatically Tuned Linear Algebra Software)* [130] é um projeto de pesquisa e uma biblioteca para álgebra linear. Ela é uma implementação completa, otimizada e em código aberto da biblioteca BLAS (seção 4.1.2.3), acrescida de algumas funções adicionais, vindas de outra biblioteca, a LAPACK (seção 4.1.2.6). Ela é distribuída sob uma licença BSD, logo, tem o código-fonte disponível, e pode ser usada em projetos de softwares livre e proprietário. Alguns dos softwares que usam a ATLAS são o MATLAB (seção 2.3.1), o Mathematica (seção 2.1.12) e o GNU Octave (seção 2.3.5). O ATLAS tem versões para a maioria dos sistemas padrão Unix e também para Windows.

Ela pode ser usada com programas em C e FORTRAN (77 e 90), e é mais indicada quando há a necessidade de otimizar a biblioteca BLAS. Como a ATLAS tem o código aberto, é muitas vezes a primeira ou a única opção de implementação da biblioteca BLAS disponível em sistemas novos. Por isso tudo, ela é usada como referencial para comparação de performance com outros produtos.

Ela tem algumas restrições. Por exemplo, é aconselhado que se use apenas o PGI FORTRAN Compiler³ no caso de código FORTRAN. No caso de usar o compilador da Intel, recomenda-se usar a Intel Math Kernel Library (seção 4.1.2.5). Não foi encontrado nada que diga se podemos ou não usar o ATLAS com o gcc⁴, compilador de código aberto do projeto GNU.

O ATLAS é uma biblioteca altamente dependente do hardware. Logo, ao compilar um código que a use, é recomendável que use a versão específica para a arquitetura de processador que está sendo usada para obter a máxima performance. Ela tem, por exemplo, suporte à instruções MMX e SSE 1 a 3, além de versões para processadores de 32 e 64 bits.

4.1.2.3 BLAS

O *BLAS (Basic Linear Algebra Subprograms)* [131] é um conjunto de rotinas usado para aplicações de álgebra linear, e que é a base para vários conjuntos de bibliotecas. O uso é liberado, sem uma licença específica para uso. O BLAS tem rotinas para implementação de computações simples com matrizes e vetores, e são usadas para a confecção de outras bibliotecas, mais sofisticadas.

Algumas das bibliotecas derivadas do BLAS são o LAPACK (seção 4.1.2.6) e o LINPACK (seção 4.1.2.7), muito usadas em computação de alta performance. Algumas das implementações do BLAS são o Flame BLAS⁵ (Universidade do Texas), o

²fabricante de microprocessadores

³Portland Group <http://www.pggroup.com/>

⁴gcc <http://gcc.gnu.org/>

⁵Flame BLAS <http://www.cs.utexas.edu/users/flame/index.html>

refblas, o Accelerate, o ATLAS (seção 4.1.2.2), a ESSL⁶ (desenvolvida pela IBM), a Intel Math Kernel Library e a GSL⁷ (projeto GNU).

O BLAS tem interfaces implementadas para linguagens como FORTRAN, C e Java, e versões otimizadas para várias arquiteturas de computadores e processadores, como AMD, IBM, Cray, Intel, Sun, etc.

4.1.2.4 EISPACK

O *EISPACK* [132] é uma biblioteca de computação numérica escrita em FORTRAN, com ênfase em resolução de problemas com autovalores e autovetores de matrizes. Ele é capaz de trabalhar com matrizes de vários tipos, como matrizes genéricas, dispostas em banda, simétricas, matrizes tridiagonais, entre outras.

Assim como o LINPACK (seção 4.1.2.7) e o MINPACK (seção 4.1.2.8), o EISPACK tem origem no Argonne National Laboratory⁸, e sua base foi originalmente escrita em ALGOL, sendo depois reescrita em FORTRAN. Seu foco sempre foi ser uma biblioteca livre, confiável, portátil e robusta. Hoje em dia seu uso diminuiu bastante, devido ao crescimento do uso da LAPACK.

4.1.2.5 Intel Math Kernel Library

A *IMKL* [133] é uma biblioteca desenvolvida pela Intel⁹, com o objetivo de aproveitar ao máximo o poder computacional dos seus processadores. A biblioteca tem uma licença proprietária, e pode ser adquirida isoladamente, ou junto com o Intel C++ and Fortran Compiler Professional¹⁰ e o Intel Cluster Toolkit¹¹. Está disponível para uso em Windows e Linux, sendo que para o sistema de código aberto, há a opção de uso gratuito e não-comercial dessa biblioteca e de todos os produtos de software da Intel.

Algumas das suas características são:

1. Todo o código é otimizado para os processadores da Intel: Itanium, Xeon, Pentium 4, Core 2 Duo;
2. Versões sequenciais e multithread disponíveis.
3. Auto-ajuste para o processador: Ela se ajusta para o processador que vai ser utilizado.
4. Suporte a C e Fortran.

Contém versões otimizadas das seguintes bibliotecas:

- BLAS (seção 4.1.2.3)
- LAPACK (seção 4.1.2.6)
- ScaLAPACK (seção 4.1.2.6)
- Benchmark do LINPACK (seção 4.1.2.7)

Contém resolutores para sistemas lineares esparsos, rotinas para cálculo da Transformada Rápida de Fourier (de 1 até 7 dimensões), implementações vetorizadas de diversas funções matemáticas, entre muitas outras funcionalidades.

4.1.2.6 LAPACK

O *LAPACK* (**L**inear **A**lgebra **PA**CKage) [134] é uma biblioteca de computação numérica escrita em FORTRAN 77, cujo objetivo é prover funções para a resolução de problemas como:

- Autovalores e autovetores;
- Sistemas de equações lineares;

⁶ESSL https://people.scs.fsu.edu/~burkardt/f_src/essl/essl.html

⁷GNU Scientific Library <http://www.gnu.org/software/gsl/>

⁸Argonne National Laboratory <http://www.anl.gov/>

⁹Fabricante de microprocessadores.

¹⁰<http://www.intel.com/cd/software/products/asmo-na/eng/346834.htm>

¹¹<http://www.intel.com/cd/software/products/asmo-na/eng/307696.htm>

- Uso do método de mínimos quadrados para sistemas lineares;
- Fatorização LU, Cholesky, decomposição QR numa matriz, entre outros;
- Problemas de singularidade numa matriz;
- entre outros.

O LAPACK foi escrito por Jack Dongarra¹², famoso pesquisador da área de computação de alto desempenho e mantenedor da lista dos 500 supercomputadores mais rápidos do mundo [17]. O LAPACK é liberado segundo uma licença especial de três cláusulas, semelhante à licença BSD, e é considerada por muitos como o sucessor da biblioteca LINPACK (seção 4.1.2.7). Ele faz uso de uma versão otimizada da biblioteca BLAS (seção 4.1.2.3) para tirar proveito da atual arquitetura de microprocessadores vigente, que traz, por exemplo, memória cache em profusão. Logo, a mesma pode operar a velocidades muito superiores do que o LINPACK original.

Algumas das estruturas de ligação criadas para usar o LAPACK com outras linguagens são:

- clapack - para uso com a linguagem C.
- LAPACK++ - para uso com C++.
- HBLas - Com a linguagem funcional Haskell.
- LACAML - Com a linguagem funcional OCaml.

Existem variações do LINPACK, dentre os quais ressaltamos:

- Sun Performance Library¹³ - uma versão otimizada do LAPACK para processadores SPARC, x86 e x86_64, para sistemas operacionais Solaris e Linux.
- ScaLAPACK (Scalable LAPACK)¹⁴ - Uma versão do LAPACK redesenhada para uso de sistemas com memória distribuída: Clusters, máquinas massivamente paralelas, computação heterogênea, entre outros. Ela pode ser executada em qualquer arquitetura de processadores e sistemas operacionais que tenha suporte às bibliotecas de passagem de mensagens MPI (seção 4.1.5.1) ou PVM (seção 4.1.5.2).
- PLAPACK (Parallel LAPACK)¹⁵ - Essa é outra versão otimizada do LAPACK para máquinas paralelas, semelhante ao ScaLAPACK, citado acima. Foi desenvolvido na Universidade do Texas, e sua diferença fundamental é que, segundo várias publicações científicas, o PLAPACK teve desempenho superior ao seu predecessor.
- Lapack95¹⁶ - Uma reimplementação feita com a linguagem FORTRAN 95, tirando proveito das novidades da linguagem.

4.1.2.7 LINPACK

O LINPACK [135] é uma biblioteca escrita em FORTRAN para resolução de problemas de álgebra linear numérica em computadores. Foi escrita no final dos anos de 1970 e início dos anos 1980, mas hoje em dia tem sido gradualmente substituída pelo LAPACK (seção 4.1.2.6), por causa desse segundo ser capaz de funcionar de forma mais eficiente nas arquiteturas atuais de computadores. Assim como o LAPACK, o LINPACK faz uso da biblioteca BLAS (seção 4.1.2.3) para operações básicas em vetores e matrizes.

Os LINPACK benchmarks¹⁷ são uma medida de capacidade de processamento em ponto flutuante, e é um programa em FORTRAN desenvolvido usando o LINPACK para resolver um sistema linear denso, da forma $Ax = b$, de dimensões $n \times n$. O método de resolução é a eliminação de Gauss com pivoteamento parciais, tendo $2n^2$ operações de ponto flutuante.

O software HPL [136] é um pacote baseado nos LINPACK benchmarks que resolvem um sistema linear randômico e denso, usando aritmética de dupla precisão (64 bits) e uma variação da fatoração LU. O HPL é usado para avaliar a capacidade de uma máquina paralela de resolver operações de ponto flutuante, e o resultado é dado em MFLOPS (Million of Floating Point Operations Per Second, ou Milhões de Operações de Ponto Flutuante Por Segundo). A lista dos 500 supercomputadores mais rápidos do mundo é organizada e atualizada (a cada 4 meses) segundo os valores obtidos na execução desse software.

¹²Jack Dongarra <http://www.netlib.org/utk/people/JackDongarra/>

¹³Sun Performance Library http://developers.sun.com/sunstudio/overview/topics/perflib_index.html

¹⁴ScaLAPACK <http://www.netlib.org/scalapack/>

¹⁵PLAPACK <http://www.cs.utexas.edu/~plapack/>

¹⁶Lapack95 <http://www.netlib.org/lapack95/>

¹⁷Linpack Benchmarks em Java <http://www.netlib.org/benchmark/linpackjava/>

4.1.2.8 MINPACK

O *MINPACK* [137] é uma biblioteca escrita em FORTRAN, cujo foco é ser usada para resolver sistemas de equações não-lineares, e a minimização pelo método dos mínimos quadrados do resíduo do conjunto de um sistema de equações lineares ou não-lineares.

Assim como o LINPACK (seção 4.1.2.7) e o EISPACK (seção 4.1.2.4), o MINPACK tem origem no Mathematics and Computer Science Division Software (MCS) do Argonne National Laboratory. Seu foco sempre foi ser uma biblioteca livre, confiável, portátil e robusta. O LAPACK hoje em dia traz várias funcionalidades do MINPACK, e com isso seu uso tem sido diminuído.

4.1.2.9 PDL

A *PDL* (Perl Data Language) [138] é uma biblioteca para a linguagem Perl, voltada para tarefas computacionais intensas, como processamento matemático: Processamento de imagens, modelagem computacional, etc. Logo, traz várias funcionalidades para análise numérica em Perl. Ela é liberada sob uma licença livre, a Artística.

A linguagem Perl por si só é muito flexível, sendo conhecida como uma "linguagem-cola", para scripting, e sendo muito empregada em projetos vinculados à Internet. Ela tem várias funcionalidades, como por exemplo, a conversão automática de tipos de dados e tamanho de variáveis ilimitado. A PDL estende essa capacidade: Por exemplo, temos uma rotina que opera sobre uma matriz de duas dimensões. Se colocarmos ela para processar uma matriz tridimensional, ela irá executar a mesma operação, em cada "camada" bidimensional da matriz.

A PDL pode gerar gráficos também, usando bibliotecas externas, como a PLPlot, PGPlot e a Karma (duas dimensões). Uma interface para gerar gráficos em três dimensões, usando a OpenGL, também é possível. Ela também tem rotinas para ler e gravar em vários formatos: JPEG, PNG, GIF, MPEG, netCDF, GRIB, além de arquivos-texto com os dados.

4.1.2.10 PetSc

A *PetSc* [139] é uma biblioteca de código aberto, desenvolvida pela divisão de Matemática e Ciência da Computação do Argonne National Laboratory, nos Estados Unidos. Tem interfaces para linguagens como C, Fortran e Python, e é construída para resolver problemas envolvendo equações diferenciais parciais, usando a biblioteca MPI (seção 4.1.5.1) para passagem de mensagens, e resolução em clusters e sistemas distribuídos. Algumas das características são:

Vetores e matrizes em paralelo (incluindo diversas formas de armazenamento de matrizes esparsas);

- Pré-condicionadores em paralelo;
- Métodos de subespaços de Krylov;
- Resolutores não-lineares baseados em Newton paralelos;
- Resolutores para equações diferenciais ordinárias em paralelo.

4.1.2.11 SuperLU

A *SuperLU* [140] é um pacote em C com três rotinas para cálculo de sistemas lineares esparsos de equações do tipo $AX = B$. A é uma matriz quadrada, não-singular, esparsa de ordem $n \times n$; X e B são matrizes densas, de ordem $n \times nrhs$, onde $nrhs$ é o número de vetores-solução. A resolução é feita usando o método de Eliminação de Gauss com pivoteamento parcial, e pode ser usada com C ou Fortran. Existem três versões:

1. A seqüencial (Sequential SuperLU);
2. A multithread (Multithreaded SuperLU) - pensada para uso com sistemas multiprocessados (SMP), e ambientes multithread;
3. A distribuída (Distributed SuperLU) - faz uso da biblioteca MPI (seção 4.1.5.1) para paralelizar a resolução.

4.1.3 Geometria Computacional

4.1.3.1 CGAL

A *CGAL* (Computational Geometry Algorithms Library) [141] é uma biblioteca, originalmente escrita em C++ (embora seja possível usá-la com Python), cujo objetivo é prover acesso fácil a algoritmos eficientes e confiáveis em geometria computacional. A CGAL tem dupla licença: Ela está disponível nas licenças LGPL e QPL, dependendo do componente e do seu uso (com outros projetos de código aberto). Em outros casos, a licença comercial deve ser adquirida.

A CGAL oferece algoritmos que compreendem:

- Operações com primitivas geométricas.
- Aritmética e álgebra.
- Polígonos e poliedros, e operações com ambos.
- Triangulações (em 2 e 3 dimensões).
- Geração de malhas.
- Interpolação.
- E várias outras.

Para uso da CGAL, é necessário o uso de outra biblioteca, a Boost C++.

4.1.4 Transformada de Fourier

A Transformada Discreta de Fourier é uma forma específica da Análise de Fourier, vista em disciplinas como Equações Diferenciais Parciais. Ela é usada para transformação de uma função discreta em uma representação do domínio da frequência. A função de entrada é uma sequência finita de números reais (ou complexos), e com isso é perfeita para processar dados em computadores.

O algoritmo adotado para resolvê-la é o FFT (**Fast Fourier Transform**), muito conhecido nas suas várias implementações. Com isso, ela é muito usada em problemas de análise espectral de sinais, compressão de dados do tipo lossless (formatos J-PEG, M-PEG, MP3, etc), multiplicação de números inteiros muito grandes, e produto de polinômios. As aplicações são muitas.

4.1.4.1 FFTW

A *FFTW* [142] é uma implementação da Transformada Rápida de Fourier, e sua sigla quer dizer: "**Fastest Fourier Transform in the West**". Ela é escrita em C, e liberada para uso geral, sob a licença GPL. As novas versões tem:

- Suporte a instruções específicas do processador para processamento numérico (como as instruções SSE, SSE2, 3D Now!, AltiVec, etc), o que garante maior desempenho.
- Interfaces em FORTRAN e C.
- Portabilidade garantida para qualquer plataforma que tenha um compilador C.
- O código pode ser paralelizado, de forma a tirar proveito de múltiplos processadores.

4.1.4.2 Kiss FFT

A *Kiss FFT* [143] é uma outra implementação da Transformada de Fourier, liberada sob a licença BSD, e baseada no princípio KISS¹⁸, ou seja: Pequena, simples e razoavelmente eficiente, facilmente recompilável para outras plataformas, e sem otimizações específicas. Ao contrário da FFTW, ela prima pela simplicidade, e pode ser eficiente o suficiente para a maioria das aplicações.

¹⁸KISS = Keep It Simple, Stupid.

The Message Passing Interface Standard

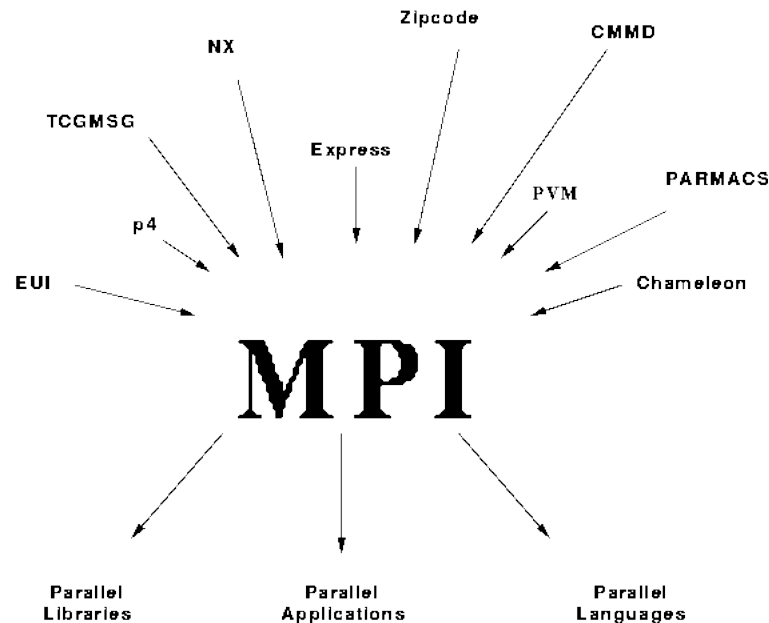


Figura 4.2: Diagrama da especificação MPI.

4.1.5 Processamento Paralelo

4.1.5.1 MPI

A **MPI** (**M**essage **P**assing **I**nterface) [144] é uma especificação para uma biblioteca de passagem de mensagens entre computadores, permitindo a comunicação entre os nós dessa rede. Hoje em dia, o MPI é o padrão de fato para projetos de computação de alto desempenho, em máquinas paralelas e com memória distribuída. Exemplos dessas arquiteturas são clusters de computadores, máquinas paralelas e arquiteturas NUMA¹⁹.

O MPI é independente da linguagem, e existem interfaces específicas para C, C++ e FORTRAN, além de qualquer linguagem que possa usar o mesmo modelo de interface. Devido à sua estrutura e projeto mais avançado, o MPI tem ganhos substanciais em termos de velocidade e portabilidade.

Logo, problemas que exijam cálculos em quantidade muito grande e computação de alto desempenho, podem ser modelados com uma linguagem de programação e o MPI como biblioteca de passagem de mensagens.

Existem diversas implementações do MPI, algumas de código aberto, e outras implementadas por empresas (como a HP-MPI, da HP). Entre elas, destacamos o Open MPI [145], que é uma implementação em código aberto da especificação MPI-2 e mantida por um consórcio formado por membros da indústria, academia e centros de pesquisa. O Open MPI é liberado segundo a nova licença BSD, e está em constante desenvolvimento. Temos também a destacar a MPICH [146] e a LAM/MPI [147], mais antigas, e também de código aberto.

4.1.5.2 PVM

A **PVM** (**P**arallel **V**irtual **M**achine) [148] é uma biblioteca de passagem de mensagens, que permite a comunicação entre os nós dessa rede. A implementação do PVM remonta a 1989, e a biblioteca é liberada sob a licença GPL e a Licença Artística. Mesmo com o crescimento do uso da especificação MPI (seção 4.1.5.1), o desenvolvimento do PVM continua, mas novas versões tem sido um tanto quanto infrequentes: A versão 3 data de 1993, e hoje em dia a atual versão é a 3.4.

O código-fonte do PVM é facilmente portátil, e existem interfaces específicas para C, C++ e FORTRAN. Outras linguagens, como Perl, também tem recebido interfaces, criadas por desenvolvedores ao longo do tempo. Um comparativo entre as funcionalidades do PVM e do MPI pode ser encontrado em [149].

¹⁹NUMA = Non-Uniform Memory Access.

4.1.6 Diversas

4.1.6.1 JScience

O *JScience* [150] é uma biblioteca, escrita em Java, com o foco em fornecer ferramentas para a comunidade científica, e promover uma sinergia entre várias ciências. Logo, ela é composta de várias partes, e na Matemática, temos:

- Módulos de álgebra linear.
- Módulos de funções para análise e cálculo funcional.
- Capacidade de lidar com números racionais e reais.
- Transformadas rápidas de Fourier.
- Integração.
- Tipos definidos: Espaços vetoriais, anéis, números complexos, etc.
- Matrizes: Decomposição matricial e vetorial.

O código-fonte está disponível, e liberado segundo a licença BSD.

4.1.6.2 JSCL-Meditor

O *JSCL-Meditor* (Java Symbolic Computing Library and Mathematical Editor) [151] é um software escrito em Java, liberado segundo uma licença livre (GPL), e tem por objetivo providenciar uma biblioteca de computação simbólica em Java com um editor matemático como interface (front-end). Existem versões desse front-end para desktops que rodem Java, e também para a plataforma de portáteis Palm OS. Ele é capaz de:

- Resolução de sistemas polinomiais;
- Vetores e matrizes;
- Fatorização e simplificação de polinômios;
- Derivação e integração;
- Álgebra booleana;
- Geometria Algébrica;
- Geração de código em Java;
- Plotagem de gráficos.

4.2 Calculadoras científicas

4.2.1 Calcoo

O *Calcoo* [152] é uma calculadora científica, liberada sob a licença GPL, e que pode operar em modo algébrico ou em RPN²⁰, e desenvolvida usando a biblioteca gráfica GTK-2. O Calcoo tem versões para diversas distribuições Linux (Ubuntu, Gentoo, Debian, Linspire), além de outros sistemas baseados em Unix (FreeBSD, OpenBSD, Mac OS X).

4.2.2 Galculator

O *Galculator* [153] é uma calculadora científica, liberada sob a licença GPL, e que tem vários recursos: Modo algébrico ou RPN, modo básico ou científico, opção de entrar a fórmula, ou operar em "modo papel", onde entra a expressão e ele resolve, de uma forma bem intuitiva. Tem opções para cálculo em bases de numeração não-decimais, funções definidas pelo usuário, entre outras opções interessantes. A interface assemelha-se às calculadoras científicas comuns, conhecidas por todos. e é desenvolvido usando a biblioteca gráfica GTK-2, integrando-se bem ao ambiente GNOME.

²⁰RPN = Reverse Polish Notation, ou Notação Polonesa Reversa.

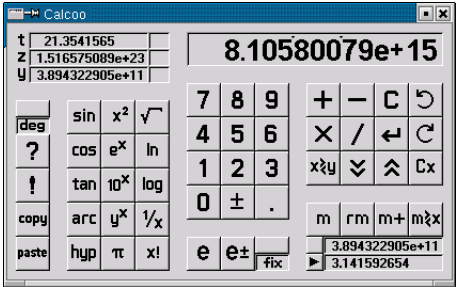


Figura 4.3: Calcoo.

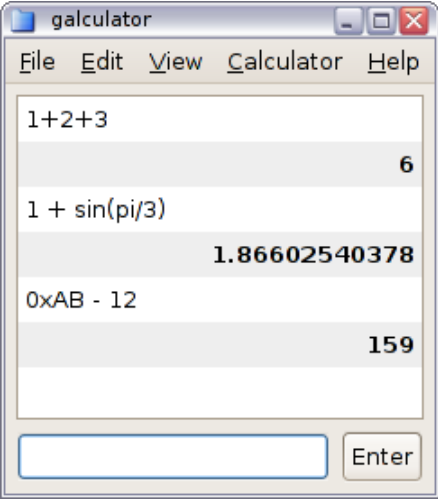


Figura 4.4: Calculator.

4.2.3 Mate

O *Mate* [154] é uma calculadora simbólica online. O uso é gratuito, via Internet, e não há a necessidade de instalar nada. O *Mate* é capaz de:

- Definir variáveis e funções;
- Resolver expressões contendo números de qualquer base de numeração entre 2 e 36, numerais romanos, complexos, variáveis, matrizes, valores booleanos, etc;
- Usar operadores lógicos e aritméticos, relações e estruturas condicionais.
- Plotagem de gráficos.

O sistema é experimental, e está na versão 0.3.

4.2.4 Orpie

O *Orpie* [155] é uma calculadora RPN para o console, com a operação parecida com as calculadoras científicas da HP, mas com o objetivo de ser mais eficiente no teclado. Algumas das suas funções são: Conversões de base e de unidades métricas; operações com números reais, complexos e matrizes; aritmética sem limites para tamanho de inteiros, entre outras funções. Ele está liberado sob a licença GPL.

4.2.5 rpcalc

O *rpcalc* [156] é uma calculadora científica, escrita em Python, que imita uma HP-48G, da HP. Dentre as suas características, temos: Usa RPN; pode ser usada com o mouse e/ou o teclado; histórico de cálculos realizados; uso da área de transferência; além das funções das calculadoras "de mão". Ele está liberado sob a licença GPL.

4.3 Lógica de alta ordem

Uma teoria matemática não pode ser considerada completa enquanto você não tiver tornado-a tão clara que possa explicá-la para a primeira pessoa que você encontrar na rua.

David Hilbert

4.3.1 HOL

O sistema *HOL* [157] é um ambiente para a demonstração de teoremas, usando lógica de alta ordem (**High Order Logic**) e uma meta-linguagem, a ML. Seus usos podem ser bem amplos. Em matemática pura, por exemplo, ela pode ser usada para formalizar a demonstração de teoremas.

Existem 3 versões:

HOL88 A mais antiga, feita em Lisp. Tem um desempenho melhor em máquinas com pouca memória, e documentação mais farta.

HOL90 Usa a Standard ML simultaneamente como a linguagem de implementação e a meta-linguagem. Tira melhor proveito do desempenho de máquinas mais novas.

HOL98 Usa também a Standard ML simultaneamente como a linguagem de implementação e a meta-linguagem. Embora tenha pouca documentação, funciona bem em computadores com pouca capacidade de processamento, e traz melhorias em relação aos sistemas HOL anteriores.

Existem muitos trabalhos derivados do HOL, dentre os quais podemos destacar alguns sistemas de demonstração de teoremas, como o ACL2²¹, o CLAM²², o Isabelle²³ e outros.

²¹An embedding of the ACL2 logic in HOL <http://portal.acm.org/citation.cfm?id=1217984>

²²Linking HOL with Clam <http://www.cl.cam.ac.uk/research/hvg/Clam.HOL/>

²³Isabelle <http://isabelle.in.tum.de/>

4.3.2 Metamath

O *Metamath* [158] é uma linguagem de programação que pode ser usada para expressar e provar teoremas em matemática pura. Ele está liberado sob uma licença livre (embora não esteja clara qual é), e tem versões para Windows, Mac OS X e sistemas Unix (como Linux, por exemplo).

O projeto Metamath compreende vários softwares, como um resolutor de teoremas, um software para explorar o espaço de Hilbert, entre outros.

Segundo o site, tudo o que é possível saber em matemática é derivado de um conjunto de axiomas conhecido como o conjunto de axiomas de Zermelo-Fraenkel²⁴, desenvolvido ao longo de muitos anos, com o objetivo de isolar a natureza essencial da matemática, e assim poder reduzir qualquer prova de teoremas a esse conjunto axiomático. Dessa forma mais de 8000 provas em lógica com o Metamath.

4.4 Computação numérica

4.4.1 Chombo

O *Chombo* [159] é um pacote de ferramentas para implementar o método das diferenças finitas, para resolver problemas com equações diferenciais parciais em malhas retangulares. Essas malhas, em particular, podem ser malhas simples, ou serem refinadas de forma adaptativa (de acordo com a necessidade, são mais refinadas em uma secção do espaço). Logo, ele é útil para modelar problemas de Análise Numérica que dependam de Epreparado para DPs segundo o método das diferenças finitas.

Ele está liberado sob a licença GPL, pode ser usado junto com as linguagens C, C++ ou FORTRAN, e as diferentes implementações da biblioteca MPI (seção 4.1.5.1). Uma característica interessante é que o Chombo pode ser usado em arquiteturas de máquinas paralelas, e a sua infraestrutura distribuída é flexível e facilmente acessível, já que o código todo foi feito sem ficar preso a nenhuma arquitetura de sistemas específica.

4.4.2 SUNDIALS

O *SUNDIALS* (**SU**ite of **N**onlinear and **D**ifferential/**AL**gebraic equation **S**olvers) [160] é um sistema para resolver equações e que é composto de 5 partes:

CVODE Resolve problemas de valor inicial²⁵ em sistemas de equações diferenciais ordinárias, usando vários métodos de resolução numérica, como as fórmulas de Adams-Moulton e o método BDF.

CVODES Resolve problemas de valor inicial²⁶ em sistemas de equações diferenciais ordinárias e inclui certas capacidades de análise de sensibilidade. Esse módulo tem o módulo anterior (**CVODE**) como um subconjunto seu, logo tem todos os métodos do mesmo, além dos métodos de iteração não-lineares equivalentes.

IDA Resolve problemas de valor inicial²⁷ em sistemas de equações diferenciais algébricas. O método aplicado é o BDF com variação de coeficientes e de ordem.

KINSOL Resolve sistemas algébricos não-lineares, usando a tecnologia de resolução de Newton-Krylov, mais especificamente o *método inexato* de Newton..

SundialsTB Uma interface semelhante ao MATLAB para os módulos CVODES e KINSOL.

O objetivo que deu origem ao SUNDIALS é criar um conjunto de resolutores não-lineares que podem ser facilmente unidos a códigos criados pelo usuário, para problemas de simulação de comportamentos, usando sistemas de equações diferenciais. Ele pode ser empregado com códigos em C e FORTRAN, suporte a problemas do MATLAB (seção 2.3.1) e à biblioteca de passagem de mensagens MPI (seção 4.1.5.1).

²⁴Axiomas de Zermelo-Fraenkel http://pt.wikipedia.org/wiki/Axiomas_de_Zermelo-Fraenkel

²⁵Problemas na forma $y' = f(t, y)$.

²⁶Problemas na forma $y' = f(t, y, p)$.

²⁷Problemas na forma $F(t, y, y') = 0$.

4.4.3 TeLa

O *TeLa* (**T**ensor **L**anguage) [161] é um ambiente de computação numérica focado em simulação numérica. Foi desenvolvido no Instituto Meteorológico da Finlândia²⁸, e está licenciado segundo uma licença livre (GPL) para vários sistemas padrão Unix (Linux inclusive). Algumas das suas características mais interessantes são:

- Suporte a matrizes multidimensionais;
- Trabalha com escalares e matrizes inteiras, reais e complexas;
- Facilmente extensível por diversos métodos.

Em comparação ao MATLAB, segundo os autores:

- Ele é de duas a quatro vezes mais rápido, em média;
- Lê e grava em formatos binários do que o MATLAB, e alguns arquivos-texto;
- Faz uso do programa PlotMTV²⁹ para desenhar. Segundo informado, o gráfico é melhor do que a versão 3.5 do MATLAB;
- Há uma ferramenta que traduz código gerado no MATLAB para o TeLa, que não é perfeita, mas pode ser corrigida depois.

²⁸<http://www.ava.fmi.fi>

²⁹<http://www.phy.ornl.gov/csep/CSEP/CORNELL/TUTORIAL/PLOTMTV/OVERVIEW.html>

Capítulo 5

Conclusões

A grande maioria dos softwares citados nesse trabalho são livres. Logo, obedecem às 4 liberdades, citadas na seção 1.2.1. Podem portanto, serem estudados, modificados e redistribuídos, sem restrição de uso. E todos eles tem versões para Linux. Alguns deles, somente para Linux. Mas a maioria também pode ser executada em plataformas proprietárias (como o Windows) ou parcialmente proprietárias (como o Mac OS X).

Concluimos que temos muitas opções para trabalhar com matemática no computador, e não precisamos estar restritos a soluções proprietárias e pagas. Melhor, podemos não só usar, mas também colaborar e fazer modificações nesses programas, desenvolvidos para tantos fins.

Fica aqui o desafio, de usar esse material como uma referência, para linhas de pesquisa e desenvolvimento em Matemática, e o uso de uma solução não só gratuita, mas livre.

Apêndice A

Licenças de uso

A.1 General Public License (GPL)

A.1.1 LICENÇA PÚBLICA GERAL GNU Versão 2, junho de 1991

Esta é uma tradução não-oficial da Licença Pública Geral GNU ("GPL GNU") para o português do Brasil. Ela não foi publicada pela Free Software Foundation, e legalmente não afirma os termos de distribuição de software que utiliza a GPL GNU – apenas o texto original da GPL GNU, em inglês, faz isso. Contudo, esperamos que esta tradução ajude aos que utilizam o português do Brasil a entender melhor a GPL GNU.

Copyright (C) 1989, 1991 Free Software Foundation, Inc. 675 Mass Ave, Cambridge, MA 02139, USA

A qualquer pessoa é permitido copiar e distribuir cópias desse documento de licença, desde que sem qualquer alteração.

A.1.2 Preâmbulo

As licenças de muitos software são desenvolvidas para restringir sua liberdade de compartilhá-lo e mudá-lo. Contrária a isso, a Licença Pública Geral GNU pretende garantir sua liberdade de compartilhar e alterar software livres – garantindo que o software será livre e gratuito para os seus usuários. Esta Licença Pública Geral aplica-se à maioria dos software da Free Software Foundation e a qualquer outro programa cujo autor decida aplicá-la. (Alguns outros software da FSF são cobertos pela Licença Pública Geral de Bibliotecas, no entanto.) Você pode aplicá-la também aos seus programas.

Quando nos referimos a software livre, estamos nos referindo a liberdade e não a preço. Nossa Licença Pública Geral foi desenvolvida para garantir que você tenha a liberdade de distribuir cópias de software livre (e cobrar por isso, se quiser); que você receba o código-fonte ou tenha acesso a ele, se quiser; que você possa mudar o software ou utilizar partes dele em novos programas livres e gratuitos; e que você saiba que pode fazer tudo isso.

Para proteger seus direitos, precisamos fazer restrições que impeçam a qualquer um negar estes direitos ou solicitar que você deles abdique. Estas restrições traduzem-se em certas responsabilidades para você, se você for distribuir cópias do software ou modificá-lo.

Por exemplo, se você distribuir cópias de um programa, gratuitamente ou por alguma quantia, você tem que fornecer aos recebedores todos os direitos que você possui. Você tem que garantir que eles também recebam ou possam obter o código-fonte. E você tem que mostrar-lhes estes termos para que eles possam conhecer seus direitos.

Nós protegemos seus direitos em dois passos: (1) com copyright do software e (2) com a oferta desta licença, que lhe dá permissão legal para copiar, distribuir e/ou modificar o software.

Além disso, tanto para a proteção do autor quanto a nossa, gostaríamos de certificar-nos que todos entendam que não há qualquer garantia nestes software livres. Se o software é modificado por alguém mais e passado adiante, queremos que seus recebedores saibam que o que eles obtiveram não é original, de forma que qualquer problema introduzido por terceiros não interfira na reputação do autor original.

Finalmente, qualquer programa é ameaçado constantemente por patentes de software. Queremos evitar o perigo de que distribuidores de software livre obtenham patentes individuais, o que tem o efeito de tornar o programa proprietário. Para prevenir isso, deixamos claro que qualquer patente tem que ser licenciada para uso livre e gratuito por qualquer pessoa, ou então que nem necessite ser licenciada.

Os termos e condições precisam para cópia, distribuição e modificação se encontram abaixo:

A.1.3 TERMOS E CONDIÇÕES PARA CÓPIA, DISTRIBUIÇÃO E MODIFICAÇÃO

- 0 Esta licença se aplica a qualquer programa ou outro trabalho que contenha um aviso colocado pelo detentor dos direitos autorais informando que aquele pode ser distribuído sob as condições desta Licença Pública Geral. O "Programa" abaixo refere-se a qualquer programa ou trabalho, e "trabalho baseado no Programa" significa tanto o Programa em si como quaisquer trabalhos derivados, de acordo com a lei de direitos autorais: isto quer dizer um trabalho que contenha o Programa ou parte dele, tanto originalmente ou com modificações, e/ou

tradução para outros idiomas. (Doravante o processo de tradução está incluído sem limites no termo "modificação".) Cada licenciado é mencionado como "você".

Atividades outras que a cópia, a distribuição e modificação não estão cobertas por esta Licença; elas estão fora de seu escopo. O ato de executar o Programa não é restringido e o resultado do Programa é coberto apenas se seu conteúdo contenha trabalhos baseados no Programa (independentemente de terem sido gerados pela execução do Programa). Se isso é verdadeiro depende do que o programa faz.

- 1 Você pode copiar e distribuir cópias fiéis do código-fonte do Programa da mesma forma que você o recebeu, usando qualquer meio, desde que você conspícua e apropriadamente publique em cada cópia um aviso de direitos autorais e uma declaração de inexistência de garantias; mantenha intactas todos os avisos que se referem a esta Licença e à ausência total de garantias; e forneça a outros recebedores do Programa uma cópia desta Licença, junto com o Programa. Você pode cobrar pelo ato físico de transferir uma cópia e pode, opcionalmente, oferecer garantia em troca de pagamento.
- 2 Você pode modificar sua cópia ou cópias do Programa, ou qualquer parte dele, assim gerando um trabalho baseado no Programa, e copiar e distribuir essas modificações ou trabalhos sob os termos da seção 1 acima, desde que você também se enquadre em todas estas condições:
 - a) Você tem que fazer com que os arquivos modificados levem avisos proeminentes afirmando que você alterou os arquivos, incluindo a data de qualquer alteração.
 - b) Você tem que fazer com que quaisquer trabalhos que você distribua ou publique, e que integralmente ou em partes contenham ou sejam derivados do Programa ou de suas partes, sejam licenciados, integralmente e sem custo algum para quaisquer terceiros, sob os termos desta Licença.
 - c) Se qualquer programa modificado normalmente lê comandos interativamente quando executados, você tem que fazer com que, quando iniciado tal uso interativo da forma mais simples, seja impresso ou mostrado um anúncio de que não há qualquer garantia (ou então que você fornece a garantia) e que os usuários podem redistribuir o programa sob estas condições, ainda informando os usuários como consultar uma cópia desta Licença. (Exceção: se o Programa em si é interativo mas normalmente não imprime estes tipos de anúncios, seu trabalho baseado no Programa não precisa imprimir um anúncio.)

Estas exigências aplicam-se ao trabalho modificado como um todo. Se seções identificáveis de tal trabalho não são derivadas do Programa, e podem ser razoavelmente consideradas trabalhos independentes e separados por si só, então esta Licença, e seus termos, não se aplicam a estas seções quando você distribui-las como trabalhos em separado. Mas quando você distribuir as mesmas seções como parte de um todo que é trabalho baseado no Programa, a distribuição como um todo tem que se enquadrar nos termos desta Licença, cujas permissões para outros licenciados se estendem ao todo, portanto também para cada e toda parte independente de quem a escreveu.

Desta forma, esta seção não tem a intenção de reclamar direitos os contestar seus direitos sobre o trabalho escrito completamente por você; ao invés disso, a intenção é a de exercitar o direito de controlar a distribuição de trabalhos, derivados ou coletivos, baseados no Programa.

Adicionalmente, a mera adição ao Programa de outro trabalho não baseado no Programa (ou de trabalho baseado no Programa) em um volume de armazenamento ou meio de distribuição não faz o outro trabalho parte do escopo desta Licença.

- 3 Você pode copiar e distribuir o Programa (ou trabalho baseado nele, conforme descrito na Seção 2) em código-objeto ou em forma executável sob os termos das Seções 1 e 2 acima, desde que você faça um dos seguintes:
 - a) O acompanhe com o código-fonte completo e em forma acessível por máquinas, que tem que ser distribuído sob os termos das Seções 1 e 2 acima e em meio normalmente utilizado para o intercâmbio de software; ou,
 - b) O acompanhe com uma oferta escrita, válida por pelo menos três anos, de fornecer a qualquer um, com um custo não superior ao custo de distribuição física do material, uma cópia do código-fonte completo e em forma acessível por máquinas, que tem que ser distribuído sob os termos das Seções 1 e 2 acima e em meio normalmente utilizado para o intercâmbio de software; ou,
 - c) O acompanhe com a informação que você recebeu em relação à oferta de distribuição do código-fonte correspondente. (Esta alternativa é permitida somente em distribuição não comerciais, e apenas se você recebeu o programa em forma de código-objeto ou executável, com oferta de acordo com a Subseção b acima.)

O código-fonte de um trabalho corresponde à forma de trabalho preferida para se fazer modificações. Para um trabalho em forma executável, o código-fonte completo significa todo o código-fonte de todos os módulos que ele contém, mais quaisquer arquivos de definição de "interface", mais os "scripts" utilizados para se controlar a compilação e a instalação do executável. Contudo, como exceção especial, o código-fonte distribuído não precisa incluir qualquer componente normalmente distribuído (tanto em forma original quanto binária) com os maiores componentes (o compilador, o "kernel" etc.) do sistema operacional sob o qual o executável funciona, a menos que o componente em si acompanhe o executável.

Se a distribuição do executável ou código-objeto é feita através da oferta de acesso a cópias de algum lugar, então ofertar o acesso equivalente a cópia, do mesmo lugar, do código-fonte equivale à distribuição do código-fonte, mesmo que terceiros não sejam compelidos a copiar o código-fonte com o código-objeto.

- 4 Você não pode copiar, modificar, sub-licenciar ou distribuir o Programa, exceto de acordo com as condições expressas nesta Licença. Qualquer outra tentativa de cópia, modificação, sub-licenciamento ou distribuição do Programa não é válida, e cancelará automaticamente os direitos que lhe foram fornecidos por esta Licença. No entanto, terceiros que de você receberam cópias ou direitos, fornecidos sob os termos desta Licença, não terão suas licenças terminadas, desde que permaneçam em total concordância com ela.
- 5 Você não é obrigado a aceitar esta Licença já que não a assinou. No entanto, nada mais o dará permissão para modificar ou distribuir o Programa ou trabalhos derivados deste. Estas ações são proibidas por lei, caso você não aceite esta Licença. Desta forma, ao modificar ou distribuir o Programa (ou qualquer trabalho derivado do Programa), você estará indicando sua total aceitação desta Licença para fazê-los, e todos os seus termos e condições para copiar, distribuir ou modificar o Programa, ou trabalhos baseados nele.
- 6 Cada vez que você redistribuir o Programa (ou qualquer trabalho baseado nele), os recebedores adquirirão automaticamente do licenciador original uma licença para copiar, distribuir ou modificar o Programa, sujeitos a estes termos e condições. Você não poderá impor aos recebedores qualquer outra restrição ao exercício dos direitos então adquiridos. Você não é responsável em garantir a concordância de terceiros a esta Licença.
- 7 Se, em consequência de decisões judiciais ou alegações de infringimento de patentes ou quaisquer outras razões (não limitadas a assuntos relacionados a patentes), condições forem impostas a você (por ordem judicial, acordos ou outras formas) e que contradigam as condições desta Licença, elas não o livram das condições desta Licença. Se você não puder distribuir de forma a satisfazer simultaneamente suas obrigações para com esta Licença e para com as outras obrigações pertinentes, então como consequência você não poderá distribuir o Programa. Por exemplo, se uma licença de patente não permitirá a redistribuição, livre de "royalties", do Programa, por todos aqueles que receberem cópias direta ou indiretamente de você, então a única forma de você satisfazer a ela e a esta Licença seria a de desistir completamente de distribuir o Programa.

Se qualquer parte desta seção for considerada inválida ou não aplicável em qualquer circunstância particular, o restante da seção se aplica, e a seção como um todo se aplica em outras circunstâncias.

O propósito desta seção não é o de induzi-lo a infringir quaisquer patentes ou reivindicação de direitos de propriedade outros, ou a contestar a validade de quaisquer dessas reivindicações; esta seção tem como único propósito proteger a integridade dos sistemas de distribuição de software livres, o que é implementado pela prática de licenças públicas. Várias pessoas têm contribuído generosamente e em grande escala para os software distribuídos usando este sistema, na certeza de que sua aplicação é feita de forma consistente; fica a critério do autor/doador decidir se ele ou ela está disposto a distribuir software utilizando outro sistema, e um licenciado não pode impor qualquer escolha.

Esta seção destina-se a tornar bastante claro o que se acredita ser consequência do restante desta Licença.

- 8 Se a distribuição e/ou uso do Programa são restringidos em certos países por patentes ou direitos autorais, o detentor dos direitos autorais original, e que colocou o Programa sob esta Licença, pode incluir uma limitação geográfica de distribuição, excluindo aqueles países de forma a tornar a distribuição permitida apenas naqueles ou entre aqueles países então não excluídos. Nestes casos, esta Licença incorpora a limitação como se a mesma constasse escrita nesta Licença.
- 9 A Free Software Foundation pode publicar versões revisadas e/ou novas da Licença Pública Geral de tempos em tempos. Estas novas versões serão similares em espírito à versão atual, mas podem diferir em detalhes que resolvem novos problemas ou situações.

A cada versão é dada um número distinto. Se o Programa especifica um número de versão específico desta Licença que se aplica a ele e a "qualquer nova versão", você tem a opção de aceitar os termos e condições daquela versão ou de qualquer outra versão publicada pela Free Software Foundation. Se o programa não especifica um número de versão desta Licença, você pode escolher qualquer versão já publicada pela Free Software Foundation.

- 10 Se você pretende incorporar partes do Programa em outros programas livres cujas condições de distribuição são diferentes, escreva ao autor e solicite permissão. Para o software que a Free Software Foundation detém direitos autorais, escreva à Free Software Foundation; às vezes nós permitimos exceções a este caso. Nossa decisão será guiada pelos dois objetivos de preservar a condição de liberdade de todas as derivações do nosso software livre, e de promover o compartilhamento e reutilização de software em aspectos gerais.

A.1.4 AUSÊNCIA DE GARANTIAS

- 11 UMA VEZ QUE O PROGRAMA É LICENCIADO SEM ÔNUS, NÃO HÁ QUALQUER GARANTIA PARA O PROGRAMA, NA EXTENSÃO PERMITIDA PELAS LEIS APLICÁVEIS. EXCETO QUANDO EXPRESSADO DE FORMA ESCRITA, OS DETENTORES DOS DIREITOS AUTORAIS E/OU TERCEIROS DISPONIBILIZAM O PROGRAMA "NO ESTADO", SEM QUALQUER TIPO DE GARANTIAS, EXPRESSAS OU IMPLÍCITAS, INCLUINDO, MAS NÃO LIMITADO A, AS GARANTIAS IMPLÍCITAS DE COMERCIALIZAÇÃO E AS DE ADEQUAÇÃO A QUALQUER PROPÓSITO. O RISCO TOTAL COM A QUALIDADE E DESEMPENHO DO PROGRAMA É SEU. SE O PROGRAMA SE MOSTRAR DEFEITUOSO, VOCÊ ASSUME OS CUSTOS DE TODAS AS MANUTENÇÕES, REPAROS E CORREÇÕES.
- 12 EM NENHUMA OCASIÃO, A MENOS QUE EXIGIDO PELAS LEIS APLICÁVEIS OU ACORDO ESCRITO, OS DETENTORES DOS DIREITOS AUTORAIS, OU QUALQUER OUTRA PARTE QUE POSSA MODIFICAR E/OU REDISTRIBUIR O PROGRAMA CONFORME PERMITIDO ACIMA, SERÃO RESPONSABILIZADOS POR VOCÊ POR DANOS, INCLUINDO QUALQUER DANO EM GERAL, ESPECIAL, ACIDENTAL OU CONSEQUENTE, RESULTANTES DO USO OU INCAPACIDADE DE

USO DO PROGRAMA (INCLUINDO, MAS NÃO LIMITADO A, A PERDA DE DADOS OU DADOS TORNADOS INCORRETOS, OU PERDAS SOFRIDAS POR VOCÊ OU POR OUTRAS PARTES, OU FALHAS DO PROGRAMA AO OPERAR COM QUALQUER OUTRO PROGRAMA), MESMO QUE TAL DETENTOR OU PARTE TENHAM SIDO AVISADOS DA POSSIBILIDADE DE TAIS DANOS.

FIM DOS TERMOS E CONDIÇÕES

A.2 Licença BSD

Copyright (c) 1982, 1986, 1990, 1991, 1993

O autor. Todos os direitos reservados.

Redistribuição e uso nas formas de código fonte ou binários, com ou sem modificação são permitidas dentro das seguintes condições:

1. A redistribuição do software deve conter todas as informações sobre direitos autorais, esta lista de condições e o aviso abaixo;
2. A redistribuição de binários ou executáveis deve conter todas as informações sobre direitos autorais, listas de condições e o aviso abaixo anúncio na documentação e/ou em outros materiais constantes da distribuição;
3. O nome do autor ou de seus contribuintes não pode ser utilizado para endossar ou promover produtos derivados deste software sem expressa autorização por escrito.

ESTE SOFTWARE É DISTRIBUÍDO POR SEUS MONITORES E CONTRIBUINTES NA FORMA EM QUE SE ENCONTRA, E QUALQUER GARANTIA EXPRESSA OU IMPLÍCITA, INCLUINDO, MAS NÃO LIMITADAS AS GARANTIAS COMERCIAIS E ATENDIMENTO DE DETERMINADOS PROPÓSITOS QUE NÃO SÃO RECONHECIDAS. EM NENHUMA HIPÓTESE OS MONITORES OU SEUS CONTRIBUINTES SERÃO RESPONSÁVEIS POR QUALQUER DANO DIRETO, INDIRETO, ACIDENTAL, ESPECIAL, INCLUINDO, MAS NÃO LIMITADO À SUSBTITUIÇÃO DE MERCADORIAS OU SERVIÇOS, IMPOSSIBILIDADE DE USO, PERDA DE DADOS, LUCROS CESSANTES OU INTERRUPÇÃO DE ATIVIDADES COMERCIAIS, CAUSADOS EM QUALQUER BASE PELO USO DESTES SOFTWARE.

A.3 GNU Free Documentation License (GFDL)

Licença de Documentação Livre GNU Versão 1.1, Março de 2000

Copyright (C) 2000 Free Software Foundation, Inc.

59 Temple Place, Suite 330, Boston, MA 02111-1307 USA

É permitido a qualquer um copiar e distribuir cópias exatas deste documento de licença, mas não é permitido alterá-lo.

A.3.1 INTRODUÇÃO

O propósito desta Licença é deixar um manual, livro-texto ou outro documento escrito "livre" no sentido de liberdade: assegurar a qualquer um a efetiva liberdade de copiar ou redistribuí-lo, com ou sem modificações, comercialmente ou não. Secundariamente, esta Licença mantém para o autor e editor uma forma de ter crédito por seu trabalho, sem ser considerado responsável pelas modificações feitas por terceiros.

Esta licença é um tipo de "copyleft" ("direitos revertidos"), o que significa que derivações do documento precisam ser livres no mesmo sentido. Ela complementa a GNU Licença Pública Geral (GNU GPL), que é um copyleft para software livre.

Nós fizemos esta Licença para que seja usada em manuais de software livre, porque software livre precisa de documentação livre: um programa livre deve ser acompanhado de manuais que forneçam as mesmas liberdades que o software possui. Mas esta Licença não está restrita a manuais de software; ela pode ser usada para qualquer trabalho em texto, independentemente do assunto ou se ele é publicado como um livro impresso. Nós recomendamos esta Licença principalmente para trabalhos cujo propósito seja de intrusão ou referência.

A.3.2 APLICABILIDADE E DEFINIÇÕES

Esta Licença se aplica a qualquer manual ou outro texto que contenha uma nota colocada pelo detentor dos direitos autorais dizendo que ele pode ser distribuído sob os termos desta Licença. O "Documento", abaixo, se refere a qualquer tal manual ou texto. Qualquer pessoa do público é um licenciado e é referida como "você".

Uma "Versão Modificada" do Documento se refere a qualquer trabalho contendo o documento ou uma parte dele, quer copiada exatamente, quer com modificações e/ou traduzida em outra língua.

Uma "Seção Secundária" é um apêndice ou uma seção inicial do Documento que trata exclusivamente da relação dos editores ou dos autores do Documento com o assunto geral do Documento (ou assuntos relacionados) e não contém nada que poderia ser incluído diretamente nesse

assunto geral. (Por exemplo, se o Documento é em parte um livro texto de matemática, a Seção Secundária pode não explicar nada de matemática). Essa relação poderia ser uma questão de ligação histórica com o assunto, ou matérias relacionadas, ou de posições legais, comerciais, filosóficas, éticas ou políticas relacionadas ao mesmo.

As "Seções Invariantes" são certas Seções Secundárias cujos títulos são designados, como sendo de Seções Invariantes, na nota que diz que o Documento é publicado sob esta Licença.

Os "Textos de Capa" são certos trechos curtos de texto que são listados, como Textos de Capa Frontal ou Textos da Quarta Capa, na nota que diz que o texto é publicado sob esta Licença.

Uma cópia "Transparente" do Documento significa uma cópia que pode ser lida automaticamente, representada num formato cuja especificação esteja disponível ao público geral, cujos conteúdos possam ser vistos e editados diretamente e sem mecanismos especiais com editores de texto genéricos ou (para imagens compostas de pixels) programas de pintura genéricos ou (para desenhos) por algum editor de desenhos grandemente difundido, e que seja passível de servir como entrada a formataadores de texto ou para tradução automática para uma variedade de formatos que sirvam de entrada para formataadores de texto. Uma cópia feita em um formato de arquivo outrossim Transparente cuja constituição tenha sido projetada para atrapalhar ou desencorajar modificações subsequentes pelos leitores não é Transparente. Uma cópia que não é "Transparente" é chamada de "Opaca".

Exemplos de formatos que podem ser usados para cópias Transparentes incluem ASCII simples sem marcações, formato de entrada do Texinfo, formato de entrada do \LaTeX , SGML ou XML usando uma DTD disponibilizada publicamente, e HTML simples, compatível com os padrões, e projetado para ser modificado por pessoas. Formatos opacos incluem PostScript, PDF, formatos proprietários que podem ser lidos e editados apenas com processadores de texto proprietários, SGML ou XML para os quais a DTD e/ou ferramentas de processamento e edição não estejam disponíveis para o público, e HTML gerado automaticamente por alguns editores de texto com finalidade apenas de saída.

A "Página do Título" significa, para um livro impresso, a página do título propriamente dita, mais quaisquer páginas subsequentes quantas forem necessárias para conter, de forma legível, o material que esta Licença requer que apareça na página do título. Para trabalhos que não tenham uma tal página do título, "Página do Título" significa o texto próximo da aparição mais proeminente do título do trabalho, precedendo o início do corpo do texto.

A.3.3 FAZENDO CÓPIAS EXATAS

Você pode copiar e distribuir o Documento em qualquer meio, de forma comercial ou não comercial, desde que esta Licença, as notas de copyright, e a nota de licença dizendo que esta Licença se aplica ao documento estejam reproduzidas em todas as cópias, e que você não acrescente nenhuma outra condição quaisquer que sejam às desta Licença.

Você não pode usar medidas técnicas para obstruir ou controlar a leitura ou confecção de cópias subsequentes das cópias que você fizer ou distribuir. Entretanto, você pode aceitar compensação em troca de cópias. Se você distribuir uma quantidade grande o suficiente de cópias, você também precisa respeitar as condições da seção 3.

Você também pode emprestar cópias, sob as mesmas condições colocadas acima, e você também pode exibir cópias publicamente.

A.3.4 FAZENDO CÓPIAS EM QUANTIDADE

Se você publicar cópias do Documento em número maior que 100, e a nota de licença do Documento obrigar Textos de Capa, você precisa incluir as cópias em capas que tragam, clara e legivelmente, todos esses Textos de Capa: Textos de Capa da Frente na capa da frente, e Textos da Quarta Capa na capa de trás. Ambas as capas também precisam identificar clara e legivelmente você como o editor dessas cópias. A capa da frente precisa apresentar o título completo com todas as palavras do título igualmente proeminentes e visíveis. Você pode adicionar outros materiais às capas. Fazer cópias com modificações limitadas às capas, tanto quanto estas preservem o título do documento e satisfaçam essas condições, pode tratado como cópia exata em outros aspectos.

Se os textos requeridos em qualquer das capas for muito volumoso para caber de forma legível, você deve colocar os primeiros (tantos quantos couberem de forma razoável) na capa verdadeira, e continuar os outros nas páginas adjacentes.

Se você publicar ou distribuir cópias Opacas do Documento em número maior que 100, você precisa ou incluir uma cópia Transparente que possa ser lida automaticamente com cada cópia Opaca, ou informar em ou com cada cópia Opaca a localização de uma cópia Transparente completa do Documento acessível publicamente em uma rede de computadores, à qual o público usuário de redes tenha acesso a download gratuito e anônimo utilizando padrões públicos de protocolos de rede. Se você utilizar o segundo método, você precisa tomar cuidados razoavelmente prudentes, quando iniciar a distribuição de cópias Opacas em quantidade, para assegurar que esta cópia Transparente vai permanecer acessível desta forma na localização especificada por pelo menos um ano depois da última vez em que você distribuir uma cópia Opaca (diretamente ou através de seus agentes ou distribuidores) daquela edição para o público.

É pedido, mas não é obrigatório, que você contate os autores do Documento bem antes de redistribuir qualquer grande número de cópias, para lhes dar uma oportunidade de prover você com uma versão atualizada do Documento.

A.3.5 MODIFICAÇÕES

Você pode copiar e distribuir uma Versão Modificada do Documento sob as condições das seções 2 e 3 acima, desde que você publique a Versão Modificada estritamente sob esta Licença, com a Versão Modificada tomando o papel do Documento, de forma a licenciar a distribuição

e modificação da Versão Modificada para quem quer que possua uma cópia da mesma. Além disso, você precisa fazer o seguinte na versão modificada:

- A.** Usar na Página de Título (e nas capas, se alguma) um título distinto daquele do Documento, e daqueles de versões anteriores (que deveriam, se houvesse algum, estarem listados na seção Histórico do Documento). Você pode usar o mesmo título de uma versão anterior se o editor original daquela versão lhe der permissão.
- B.** Listar na Página de Título, como autores, uma ou mais das pessoas ou entidades responsáveis pela autoria das modificações na Versão Modificada, conjuntamente com pelo menos cinco dos autores principais do Documento (todos os seus autores principais, se ele tiver menos que cinco).
- C.** Colocar na Página de Título o nome do editor da Versão Modificada, como o editor.
- D.** Preservar todas as notas de copyright do Documento.
- E.** Adicionar uma nota de copyright apropriada para suas próprias modificações adjacente às outras notas de copyright.
- F.** Incluir, imediatamente depois das notas de copyright, uma nota de licença dando ao público o direito de usar a Versão Modificada sob os termos desta Licença, na forma mostrada no Adendo abaixo.
- G.** Preservar nessa nota de licença as listas completas das Seções Invariantes e os Textos de Capa requeridos dados na nota de licença do Documento.
- H.** Incluir uma cópia inalterada desta Licença.
- I.** Preservar a seção intitulada "Histórico", e seu título, e adicionar à mesma um item dizendo pelo menos o título, ano, novos autores e editor da Versão Modificada como dados na Página de Título. Se não houver uma sessão denominada "Histórico"; no Documento, criar uma dizendo o título, ano, autores, e editor do Documento como dados em sua Página de Título, então adicionar um item descrevendo a Versão Modificada, tal como descrito na sentença anterior.
- J.** Preservar o endereço de rede, se algum, dado no Documento para acesso público a uma cópia Transparente do Documento, e da mesma forma, as localizações de rede dadas no Documento para as versões anteriores em que ele foi baseado. Elas podem ser colocadas na seção "Histórico". Você pode omitir uma localização na rede para um trabalho que tenha sido publicado pelo menos quatro anos antes do Documento, ou se o editor original da versão a que ela se refira der sua permissão.
- K.** Em qualquer seção intitulada "Agradecimentos"; ou "Dedicatórias";, preservar o título da seção e preservar a seção em toda substância e tim de cada um dos agradecimentos de contribuidores e/ou dedicatórias dados.
- L.** Preservar todas as Seções Invariantes do Documento, inalteradas em seus textos ou em seus títulos. Números de seção ou equivalentes não são considerados parte dos títulos da seção.
- M.** Apagar qualquer seção intitulada "Endossos";. Tal sessão não pode ser incluída na Versão Modificada.
- N.** Não re-entitular qualquer seção existente com o título "Endossos"; ou com qualquer outro título dado a uma Seção Invariante.

Se a Versão Modificada incluir novas seções iniciais ou apêndices que se qualifiquem como Seções Secundárias e não contenham nenhum material copiado do Documento, você pode optar por designar alguma ou todas aquelas seções como invariantes. Para fazer isso, adicione seus títulos à lista de Seções Invariantes na nota de licença da Versão Modificada. Esses títulos precisam ser diferentes de qualquer outro título de seção.

Você pode adicionar uma seção intitulada "Endossos";, desde que ela não contenha qualquer coisa além de endossos da sua Versão Modificada por várias pessoas ou entidades - por exemplo, declarações de revisores ou de que o texto foi aprovado por uma organização como a definição oficial de um padrão.

Você pode adicionar uma passagem de até cinco palavras como um Texto de Capa da Frente, e uma passagem de até 25 palavras como um Texto de Quarta Capa, ao final da lista de Textos de Capa na Versão Modificada. Somente uma passagem de Texto da Capa da Frente e uma de Texto da Quarta Capa podem ser adicionados por (ou por acordos feitos por) qualquer entidade. Se o Documento já incluir um texto de capa para a mesma capa, adicionado previamente por você ou por acordo feito com alguma entidade para a qual você esteja agindo, você não pode adicionar um outro; mas você pode trocar o antigo, com permissão explícita do editor anterior que adicionou a passagem antiga.

O(s) autor(es) e editor(es) do Documento não dão permissão por esta Licença para que seus nomes sejam usados para publicidade ou para assegurar ou implicar endossamento de qualquer Versão Modificada.

A.3.6 COMBINANDO DOCUMENTOS

Você pode combinar o Documento com outros documentos publicados sob esta Licença, sob os termos definidos na seção 4 acima para versões modificadas, desde que você inclua na combinação todas as Seções Invariantes de todos os documentos originais, sem modificações, e liste todas elas como Seções Invariantes de seu trabalho combinado em sua nota de licença.

O trabalho combinado precisa conter apenas uma cópia desta Licença, e Seções Invariantes Idênticas com múltiplas ocorrências podem ser substituídas por apenas uma cópia. Se houver múltiplas Seções Invariantes com o mesmo nome mas com conteúdos distintos, faça o título de cada seção único adicionando ao final do mesmo, em parênteses, o nome do autor ou editor original daquela seção, se for conhecido, ou um número que seja único. Faça o mesmo ajuste nos títulos de seção na lista de Seções Invariantes nota de licença do trabalho combinado.

Na combinação, você precisa combinar quaisquer seções intituladas "Histórico"; dos diversos documentos originais, formando uma seção intitulada "Histórico"; da mesma forma combine quaisquer seções intituladas "Agradecimentos", ou "Dedicatórias". Você precisa apagar todas as seções intituladas como "Endosso".

A.3.7 COLETÂNEAS DE DOCUMENTOS

Você pode fazer uma coletânea consistindo do Documento e outros documentos publicados sob esta Licença, e substituir as cópias individuais desta Licença nos vários documentos com uma única cópia incluída na coletânea, desde que você siga as regras desta Licença para cópia exata de cada um dos Documentos em todos os outros aspectos.

Você pode extrair um único documento de tal coletânea, e distribuí-lo individualmente sob esta Licença, desde que você insira uma cópia desta Licença no documento extraído, e siga esta Licença em todos os outros aspectos relacionados à cópia exata daquele documento.

A.3.8 AGREGAÇÃO COM TRABALHOS INDEPENDENTES

Uma compilação do Documento ou derivados dele com outros trabalhos ou documentos separados e independentes, em um volume ou mídia de distribuição, não conta como uma Versão Modificada do Documento, desde que não seja reclamado nenhum copyright de compilação seja reclamado pela compilação. Tal compilação é chamada um "agregado", e esta Licença não se aplica aos outros trabalhos auto-contidos compilados junto com o Documento, só por conta de terem sido assim compilados, e eles não são trabalhos derivados do Documento.

Se o requerido para o Texto de Capa na seção 3 for aplicável a essas cópias do Documento, então, se o Documento constituir menos de um quarto de todo o agregado, os Textos de Capa do Documento podem ser colocados em capas adjacentes ao Documento dentro do agregado. Senão eles precisam aparecer nas capas de todo o agregado.

A.3.9 TRADUÇÃO

A tradução é considerada como um tipo de modificação, então você pode distribuir traduções do Documento sob os termos da seção 4. A substituição de Seções Invariantes por traduções requer uma permissão especial dos detentores do copyright das mesmas, mas você pode incluir traduções de algumas ou de todas as Seções Invariantes em adição as versões originais dessas Seções Invariantes. Você pode incluir uma tradução desta Licença desde que você também inclua a versão original em Inglês desta Licença. No caso de discordância entre a tradução e a versão original em Inglês desta Licença, a versão original em Inglês prevalecerá.

A.3.10 TÉRMINO

Você não pode copiar, modificar, sublicenciar, ou distribuir o Documento exceto como expressamente especificado sob esta Licença. Qualquer outra tentativa de copiar, modificar, sublicenciar, ou distribuir o Documento é nula, e resultará automaticamente no término de seus direitos sob esta Licença. Entretanto, terceiros que tenham recebido cópias, ou direitos, de você sob esta Licença não terão suas licenças terminadas tanto quanto esses terceiros permaneçam em total acordo com esta Licença.

A.3.11 REVISÕES FUTURAS DESTA LICENÇA

A Free Software Foundation pode publicar novas versões revisadas da Licença de Documentação Livre GNU de tempos em tempos. Tais novas versões serão similares em espírito à versão presente, mas podem diferir em detalhes ao abordarem novos problemas e preocupações. Veja <http://www.gnu.org/copyleft/>.

A cada versão da Licença é dado um número de versão distinto. Se o Documento especificar que uma versão particular desta Licença "ou qualquer versão posterior" se aplica ao mesmo, você tem a opção de seguir os termos e condições daquela versão específica, ou de qualquer versão posterior que tenha sido publicada (não como rascunho) pela Free Software Foundation. Se o Documento não especificar um número de Versão desta Licença, você pode escolher qualquer versão já publicada (não como rascunho) pela Free Software Foundation.

Referências Bibliográficas

- [1] História do Unix <http://www.pop-rs.rnp.br/ovni/unix/history.html>, acessado em 3 de maio de 2008.
- [2] História do Unix, segundo o Bell Labs <http://www.bell-labs.com/history/unix/>, acessado em 22 de fevereiro de 2008.
- [3] História do BSD <http://www.geocities.com/connorbd/bsd.html>, acessado em 26 de agosto de 2008.
- [4] Celulares com Linux http://tuxmobil.org/phones_linux.html, acessado em 9 de setembro de 2007.
- [5] Discussão sobre kernel <http://www.cs.vu.nl/%7East/reliable-os/>, acessado em 3 de janeiro de 2008.
- [6] Minix <http://www.minix3.org/>, acessado em 9 de agosto de 2007.
- [7] Edubuntu <http://www.edubuntu.org/>, acessado em 29 de abril de 2008.
- [8] Freeduc <http://www.offset.org/freeduc/>, acessado em 2 de março de 2008.
- [9] Free Software Foundation <http://www.fsf.org>, acessado em 18 de novembro de 2007.
- [10] Projeto GNU: História http://pt.wikipedia.org/wiki/Projeto_GNU, acessado em 29 de junho de 2008.
- [11] Linux <http://pt.wikipedia.org/wiki/Linux>, acessado em 15 de julho de 2008.
- [12] Manifesto GNU <http://www.gnu.org/gnu/manifesto.pt.html>, acessado em 13 de julho de 2008.
- [13] Matemática Interativa Linux <http://mil.codigolivre.org.br/>, acessado em 9 de dezembro de 2007.
- [14] Hardware suportado pelo NetBSD <http://www.netbsd.org/ports/>, acessado em 12 de dezembro de 2007.
- [15] POSIX <http://www.knosof.co.uk/posix.html>, acessado em 26 de julho de 2008.
- [16] Página pessoal de Richard M. Stallman <http://www.stallman.org/>, acessado em 12 de dezembro de 2007.
- [17] Lista dos 500 supercomputadores mais rápidos, por família de sistema operacional <http://www.top500.org/stats/list/29/osfam>, acessado em 10 de março de 2008.
- [18] The Open Group http://pt.wikipedia.org/wiki/The_Open_Group, acessado em 3 de fevereiro de 2008.
- [19] One Laptop Per Child <http://pt.wikipedia.org/wiki/OLPC>, acessado em 6 de fevereiro de 2008.
- [20] Classmate PC <http://www.classmatepc.com/>, acessado em 30 de janeiro de 2008.
- [21] IMPA http://www.impa.br/opencms/pt/downloads/avaliacoes_cient_pt.pdf, acessado em 14 de fevereiro de 2008.
- [22] Freshmeat <http://freshmeat.net>, acessado em 23 de julho de 2008.
- [23] Aldor <http://www.aldor.org/>, acessado em 5 de novembro de 2008.
- [24] Axiom <http://www.axiom-developer.org/>, acessado em 30 de julho de 2008.
- [25] DCAS <http://sourceforge.net/projects/dcas/>, acessado em 2 de julho de 2008.
- [26] Eigenmath <http://www.eigenmath.net/>, acessado em 26 de junho de 2008.
- [27] Fermat <http://home.bway.net/lewis/>, acessado em 9 de dezembro de 2007.

- [28] Comparativo de desempenho do Fermat com outros softwares <http://www.bway.net/~lewis/cacomp.ps>, acessado em 1 de setembro de 2008.
- [29] FriCAS <http://fricas.sf.net>, acessado em 4 de setembro de 2008.
- [30] Giac/Xcas <http://directory.fsf.org/project/giac/>, acessado em 17 de janeiro de 2008.
- [31] Magma <http://magma.maths.usyd.edu.au/>, acessado em 23 de abril de 2008.
- [32] Maple <http://www.maplesoft.com/>, acessado em 16 de fevereiro de 2008.
- [33] MathEclipse <http://www.matheclipse.org>, acessado em 23 de julho de 2008.
- [34] Mathmagicx <http://www.mathmagicx.org>, acessado em 3 de outubro de 2007.
- [35] Mathematica <http://www.wolfram.com/>, acessado em 4 de agosto de 2008.
- [36] Mathomatic <http://www.mathomatic.org/>, acessado em 19 de dezembro de 2007.
- [37] Macsyma <http://www.symbolics.com/Macsyma-1.htm>, acessado em 1 de fevereiro de 2008.
- [38] Maxima <http://maxima.sourceforge.net/>, acessado em 8 de julho de 2008.
- [39] SciFace, produtora do MuPAD <http://www.sciface.com/>, acessado em 7 de julho de 2008.
- [40] Mersenne Prime Search <http://www.mersenne.org/>, acessado em 12 de maio de 2008.
- [41] Open Axiom <http://www.open-axiom.org/index.html>, acessado em 14 de outubro de 2008.
- [42] PARI/GP <http://pari.math.u-bordeaux.fr/>, acessado em 17 de maio de 2008.
- [43] Qalculate! <http://qalculate.sourceforge.net/>, acessado em 3 de outubro de 2008.
- [44] REDUCE <http://www.uni-koeln.de/REDUCE/>, acessado em 18 de novembro de 2007.
- [45] SAGE <http://www.sagemath.org/>, acessado em 21 de setembro de 2008.
- [46] TRIP <http://www.imcce.fr/Equipes/ASD/trip/trip.php>, acessado em 23 de maio de 2008.
- [47] YACAS <http://yacas.sourceforge.net>, acessado em 20 de novembro de 2007.
- [48] Bergman <http://www.math.su.se/bergman>, acessado em 30 de julho de 2008.
- [49] Cadabra <http://www.aei.mpg.de/~peekas/cadabra/>, acessado em 30 de outubro de 2007.
- [50] CoCoA <http://cocoa.dima.unige.it/>, acessado em 11 de maio de 2008.
- [51] Linguagens de programação funcional <http://tinyurl.com/funcional>, acessado em 28 de março de 2008.
- [52] Haskell <http://www.haskell.org/>, acessado em 6 de fevereiro de 2008.
- [53] DoCon <http://www.haskell.org/docon/>, acessado em 10 de maio de 2008.
- [54] GAP <http://www.gap-system.org/>, acessado em 14 de outubro de 2008.
- [55] JAS <http://krum.rz.uni-mannheim.de/jas/>, acessado em 29 de outubro de 2007.
- [56] KASH/KANT <http://www.math.tu-berlin.de/~kant/kash.html>, acessado em 21 de dezembro de 2007.
- [57] Macaulay2 <http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/>, acessado em 19 de dezembro de 2007.
- [58] Magnus <http://sourceforge.net/projects/magnus>, acessado em 28 de maio de 2008.
- [59] Singular <http://www.singular.uni-kl.de/>, acessado em 23 de dezembro de 2007.
- [60] PLURAL <http://www.singular.uni-kl.de/plural/>, acessado em 27 de dezembro de 2007.
- [61] MATLAB <http://www.mathworks.com/products/matlab/>, acessado em 22 de julho de 2008.
- [62] Mathworks <http://www.mathworks.com/>, acessado em 30 de março de 2008.

- [63] Matlab em paralelo <http://www.tinyurl.com/matlab-em-paralelo>, acessado em 31 de julho de 2008.
- [64] Euler Mathematical Toolbox <http://mathsrv.ku-eichstaett.de/MGF/homes/grothmann/euler/>, acessado em 21 de junho de 2007.
- [65] Freemat <http://freemat.sourceforge.net/>, acessado em 25 de novembro de 2007.
- [66] NA-Worksheet <http://na-worksheet.sourceforge.net>, acessado em 17 de setembro de 2008.
- [67] Octave <http://www.gnu.org/software/octave/>, acessado em 7 de março de 2008.
- [68] Octave-Forge <http://octave.sourceforge.net/>, acessado em 5 de setembro de 2008.
- [69] Octplot <http://octplot.sourceforge.net/>, acessado em 28 de agosto de 2007.
- [70] Scilab <http://www.scilab.org/>, acessado em 11 de setembro de 2008.
- [71] DIGITEO <http://www.digiteo.fr>, acessado em 10 de abril de 2008.
- [72] Endlos <http://endlos.sourceforge.net/>, acessado em 23 de janeiro de 2008.
- [73] Fractint <http://spanky.triumf.ca/www/fractint/fractint.html>, acessado em 1 de agosto de 2008.
- [74] EyeFract <http://eye.jimbomania.com/eyefract.html>, acessado em 9 de julho de 2008.
- [75] GLFract <http://jimbomania.com/glfract.html>, acessado em 7 de maio de 2008.
- [76] OpenGL <http://www.opengl.org>, acessado em 6 de abril de 2008.
- [77] Fyre <http://www.mushly.com/image-editing/software-for-painting/fyre-3d-fractal-graphics/>, acessado em 10 de agosto de 2008.
- [78] Glito http://freshmeat.net/redirect/glito/53427/url_homepage/#english, acessado em 18 de março de 2008.
- [79] Curva de Koch <http://mathworld.wolfram.com/KochSnowflake.html>, acessado em 10 de setembro de 2008.
- [80] Triângulo de Sierpinski <http://math.rice.edu/~lanius/fractals/>, acessado em 25 de novembro de 2007.
- [81] Gnofract 4D <http://gnofract4d.sourceforge.net/>, acessado em 26 de abril de 2008.
- [82] XaoS <http://xaos.sourceforge.net/>, acessado em 22 de maio de 2008.
- [83] Cabri <http://www.cabri.com/>, acessado em 22 de julho de 2008.
- [84] Archimedes Geo3D <http://archimedesgeo3d.weebly.com/>, acessado em 25 de agosto de 2008.
- [85] Axel <http://axel.inria.fr/>, acessado em 5 de dezembro de 2007.
- [86] Compass and Ruler http://mathsrv.ku-eichstaett.de/MGF/homes/grothman/java/zirkel/doc_en/, acessado em 7 de junho de 2008.
- [87] C. a R. Metal http://db-maths.nuxit.net/CaRMetal/index_en.html, acessado em 30 de julho de 2008.
- [88] Cinderella <http://cinderella.de>, acessado em 10 de abril de 2008.
- [89] Dr. Geo <http://www.offset.org/drgeo>, acessado em 28 de julho de 2008.
- [90] Eukleides <http://directory.fsf.org/project/eukleides/>, acessado em 11 de outubro de 2007.
- [91] Gambol <http://gambol.sourceforge.net>, acessado em 9 de janeiro de 2008.
- [92] Geogebra <http://www.geogebra.org/>, acessado em 1 de julho de 2008.
- [93] Geometry Expressions <http://www.geometryexpressions.com/>, acessado em 13 de janeiro de 2008.
- [94] Geomview <http://www.geomview.org/>, acessado em 25 de julho de 2008.
- [95] Geoproof <http://home.gna.org/geoproof/>, acessado em 13 de abril de 2008.
- [96] Coq Proof Assistant <http://coq.inria.fr/>, acessado em 30 de abril de 2008.

- [97] GEX <http://www.mmrc.iss.ac.cn/gex/>, acessado em 24 de julho de 2008.
- [98] iGeom <http://www.matematica.br/igeom/>, acessado em 1 de dezembro de 2007.
- [99] Kaleido <http://www.math.technion.ac.il/~rl/kaleido/README.html>, acessado em 25 de junho de 2008.
- [100] KIG <http://edu.kde.org/kig/>, acessado em 9 de dezembro de 2008.
- [101] KSEG <http://www.mit.edu/~ibaran/kseg.html>, acessado em 2 de outubro de 2008.
- [102] OpenEuclide http://www.linuxsoft.cz/en/sw_detail.php?id_item=11379, acessado em 6 de maio de 2008.
- [103] Easy Funktion <http://de.geocities.com/markusgreither/easyfunktion.htm>, acessado em 8 de novembro de 2008.
- [104] fplot <http://www.tc.umn.edu/~ringx004/fplot-main.html>, acessado em 23 de agosto de 2008.
- [105] Pinheiro, R. J., Carneiro de Araujo, J. H. - *Um método de elementos finitos para o sistema axissimétrico de Stokes em três campos usando elementos triangulares* - Tese de mestrado (2000).
- [106] gnuplot <http://www.gnuplot.info/>, acessado em 14 de setembro de 2008.
- [107] Grace <http://plasma-gate.weizmann.ac.il/Grace/>, acessado em 30 de março de 2008.
- [108] ACE/gr <http://plasma-gate.weizmann.ac.il/Xmgr/>, acessado em 31 de dezembro de 2007.
- [109] KAlgebra <http://kalgebra.berlios.de/>, acessado em 3 de novembro de 2007.
- [110] KmPlot <http://edu.kde.org/kmplot/>, acessado em 22 de setembro de 2008
- [111] LabPlot <http://labplot.sourceforge.net/>, acessado em 22 de junho de 2008.
- [112] Origin <http://www.originlab.com/>, acessado em 21 de agosto de 2008.
- [113] MayaVi <http://mayavi.sourceforge.net/>, acessado em 3 de agosto de 2007.
- [114] Octaviz <http://octaviz.sourceforge.net/>, acessado em 10 de abril de 2008.
- [115] OpenDX <http://www.opendx.org/>, acessado em 23 de maio de 2008.
- [116] Motif <http://www.opengroup.org/motif/>, acessado em 27 de fevereiro de 2008.
- [117] QtPlot <http://soft.proindependent.com/qtiplot.html>, acessado em 17 de julho de 2008.
- [118] GiNaC <http://www.ginac.de/>, acessado em 17 de maio de 2008.
- [119] JACAL <http://people.csail.mit.edu/jaffer/JACAL.html>, acessado em 1 de janeiro de 2008.
- [120] Projeto GNU <http://www.gnu.org>, acessado em 20 de julho de 2008.
- [121] Scheme <http://groups.csail.mit.edu/mac/projects/scheme/>, acessado em 8 de maio de 2008.
- [122] LiDIA <http://www.informatik.tu-darmstadt.de/TI/LiDIA/>, acessado em 31 de setembro de 2008.
- [123] NZMATH <http://tnt.math.metro-u.ac.jp/nzmth/>, acessado em 19 de maio de 2008.
- [124] Symbolic C++ <http://issc.uj.ac.za/symbolic/symbolic.html>, acessado em 12 de setembro de 2007.
- [125] SYMMETRICA <http://www.algorithm.uni-bayreuth.de/en/research/SYMMETRICA/>, acessado em 20 de abril de 2008.
- [126] SymPy <http://code.google.com/p/sympy/>, acessado em 24 de janeiro de 2008.
- [127] SymFE <http://code.google.com/p/symfe/>, acessado em 1 de julho de 2008.
- [128] SympyCore <http://code.google.com/p/sympycore/>, acessado em 1 de agosto de 2008.
- [129] AMD Core Math Library <http://developer.amd.com/acml.aspx>, acessado em 24 de maio de 2008.
- [130] ATLAS <http://math-atlas.sourceforge.net/>, acessado em 23 de outubro de 2007.

- [131] BLAS <http://www.netlib.org/blas/>, acessado em 19 de julho de 2008.
- [132] EISPACK <http://www.netlib.org/eispack/>, acessado em 5 de novembro de 2007.
- [133] Intel Math Kernel Library <http://www.intel.com/cd/software/products/asm-na/eng/307757.htm>, acessado em 30 de março de 2008.
- [134] LAPACK <http://www.netlib.org/lapack/>, acessado em 19 de janeiro de 2008.
- [135] LINPACK <http://www.netlib.org/linpack/>, acessado em 26 de maio de 2008.
- [136] HPL <http://www.netlib.org/benchmark/hpl/>, acessado em 9 de setembro de 2007.
- [137] MINPACK <http://www.netlib.org/minpack/>, acessado em 14 de julho de 2008.
- [138] Perl Data Language <http://pdl.perl.org/>, acessado em 28 de fevereiro de 2008.
- [139] PETSc <http://www.mcs.anl.gov/petsc/petsc-as/>, acessado em 22 de dezembro de 2007.
- [140] SuperLU <http://www.psc.edu/general/software/packages/superlu/>, acessado em 29 de fevereiro de 2008.
- [141] CGAL <http://www.cgal.org/>, acessado em 24 de setembro de 2008.
- [142] FFTW <http://www.fftw.org/>, acessado em 17 de abril de 2008.
- [143] Kiss FFT <http://kissfft.sourceforge.net/>, acessado em 14 de março de 2008.
- [144] MPI <http://www.mcs.anl.gov/mpi/>, acessado em 27 de agosto de 2008.
- [145] Open MPI <http://www.open-mpi.org/>, acessado em 27 de julho de 2008.
- [146] MPICH <http://www-unix.mcs.anl.gov/mpi/mpich1/>, acessado em 23 de dezembro de 2007.
- [147] LAM/MPI <http://www.lam-mpi.org/>, acessado em 10 de outubro de 2007.
- [148] PVM <http://www.epm.ornl.gov/pvm/>, acessado em 20 de novembro de 2008.
- [149] Comparativo entre PVM e MPI <http://www.csm.ornl.gov/pvm/PVMvsMPI.ps>, acessado em 11 de abril de 2008.
- [150] JScience <http://www.jscience.org>, acessado em 30 de novembro de 2007.
- [151] JSCL-Meditor <http://jscl-meditor.sourceforge.net/>, acessado em 27 de janeiro de 2008.
- [152] Calcoo <http://calcoo.sourceforge.net/>, acessado em 2 de maio de 2008.
- [153] Galculator <http://galculator.sourceforge.net/>, acessado em 21 de novembro de 2008.
- [154] Mate <http://www.tusanga.com/main/about.html>, acessado em 21 de dezembro de 2007.
- [155] Orpie <http://pessimization.com/software/orpie/>, acessado em 13 de dezembro de 2007.
- [156] rpcalc <http://rpcalc.bellz.org/>, acessado em 16 de setembro de 2007.
- [157] HOL <http://hol.sourceforge.net/>, acessado em 3 de março de 2008.
- [158] Metamath <http://us.metamath.org/>, acessado em 3 de abril de 2008.
- [159] Chombo <http://seesar.lbl.gov/ANAG/chombo/>, acessado em 18 de fevereiro de 2008.
- [160] SUNDIALS <http://www.llnl.gov/CASC/sundials/>, acessado em 4 de maio de 2008.
- [161] Tela <http://www.ava.fmi.fi/prog/tela.html>, acessado em 26 de outubro de 2008.