CARTILHA DE MATEMÁTICA

1ª

PARTE

A GEOMÉTRICA

ESTUDO DAS ORIGENS E DAS RELAÇÕES ENTRE AS FORMAS ATRAVÉS DA ARITMÉTICA

Por: José Delmar L. de Carvalho

SUMÁRIO

O CIRCULO – CONCEITO

Denomina - se de circulo as curvas que num mesmo piano retangular (quadrado) os comprimentos dos seus eixos (diâmetros) são sempre iguais entre si e ao comprimento de quaisquer dos lados desse quadrado Fig, I.

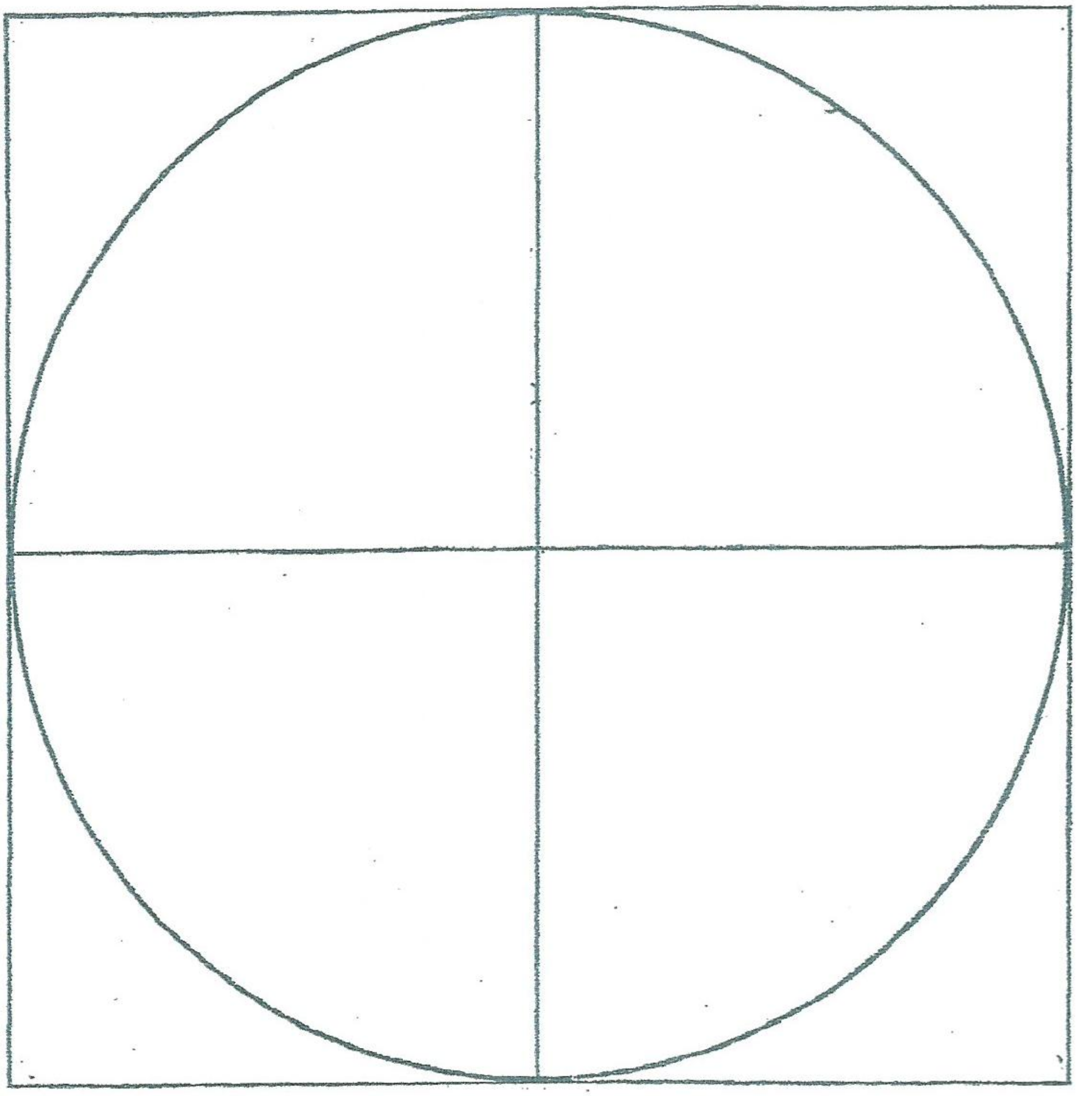


Fig. I

Os comprimentos do diâmetro e da circunferência de um circulo inscrito em um quadrado são sempre iguais a um e três quartos do comprimento desse quadrado.

CONSTRUÇÃO E RETIFICAÇÃO DE UM CÍRCULO

Para se demonstrar a relação existente entre os comprimentos do diâmetro e da circunferência de um circulo procede – se como determina a fórmula universal de retificação

$$R = \frac{d}{\sqrt{\frac{4.8.16.32}{4}}}$$

que permite construir e retificar um circulo da seguinte forma:

Constrói – se um quadrado qualquer, neste caso medindo internamente 16 cm de lados, depois traça – se as linhas 1, 2, 3 e 4 que divide ao meio cada lado desse quadrado Fig. II.

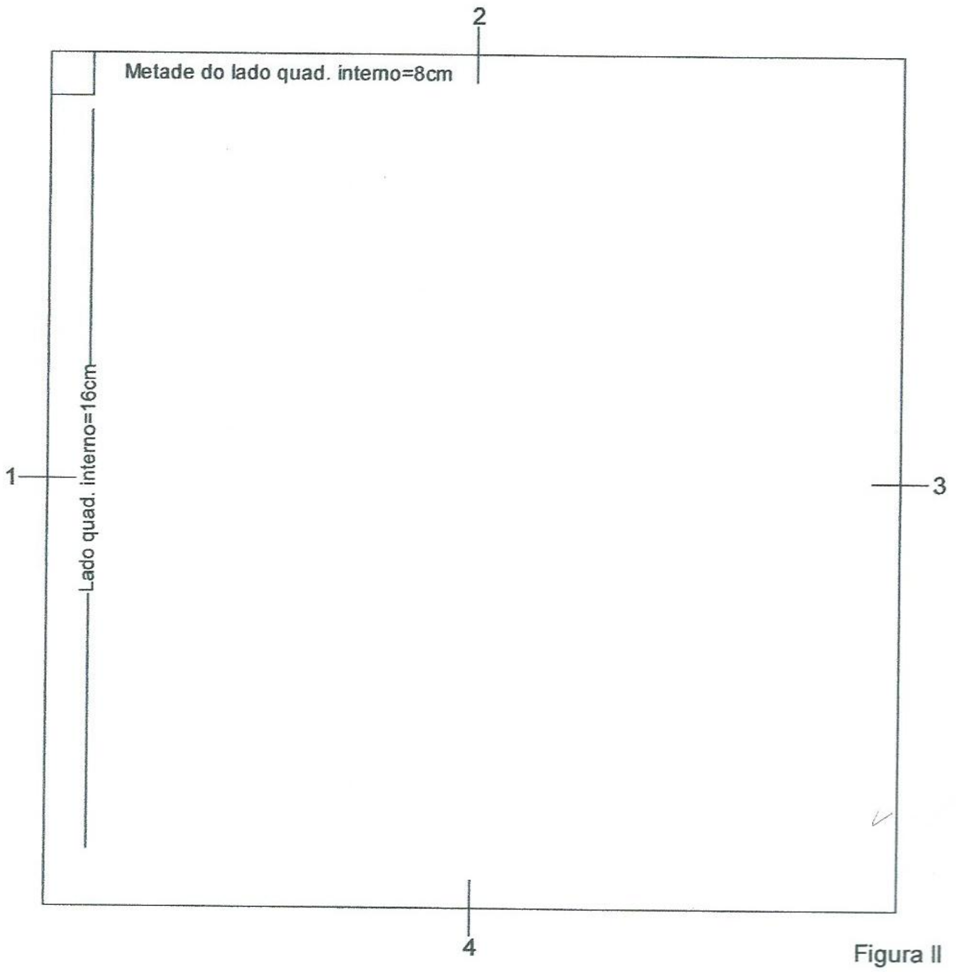


Figura II

Traça – se agora as retas 1 – 3 e 2 – 4 (diâmetros) que divide este quadrado em quatro quadrados iguais, determinam o centro (o) e os raios 0 – 1, 0 – 2... do circulo a ser construído Fig. III.

Agora com uma abertura (8 cm) correspondente ao comprimento de quaisquer dos raios 0 – 1, 0 – 2... fixa – se o compasso no vértice de quaisquer dos ângulos formados pelas retas (diâmetros) que se cruzam em (o) e constrói – se o circulo inscrito no quadrado Fig. IV.

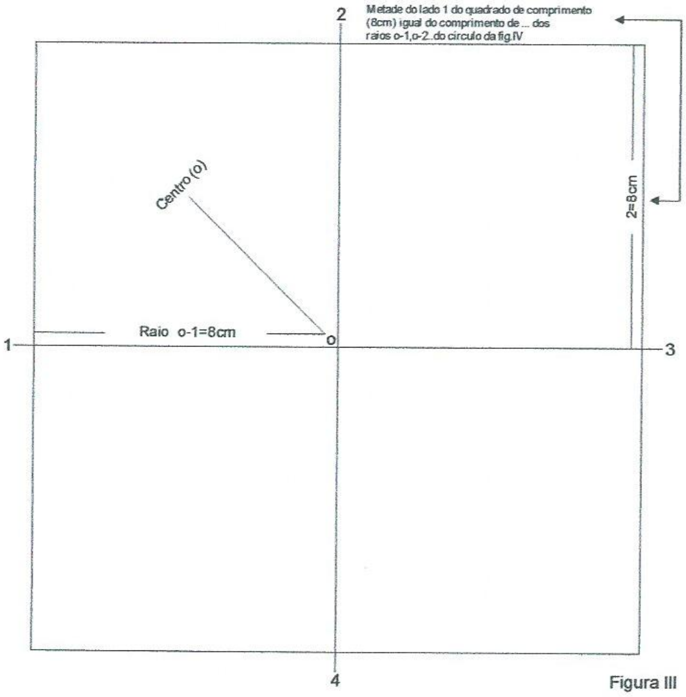


Figura III

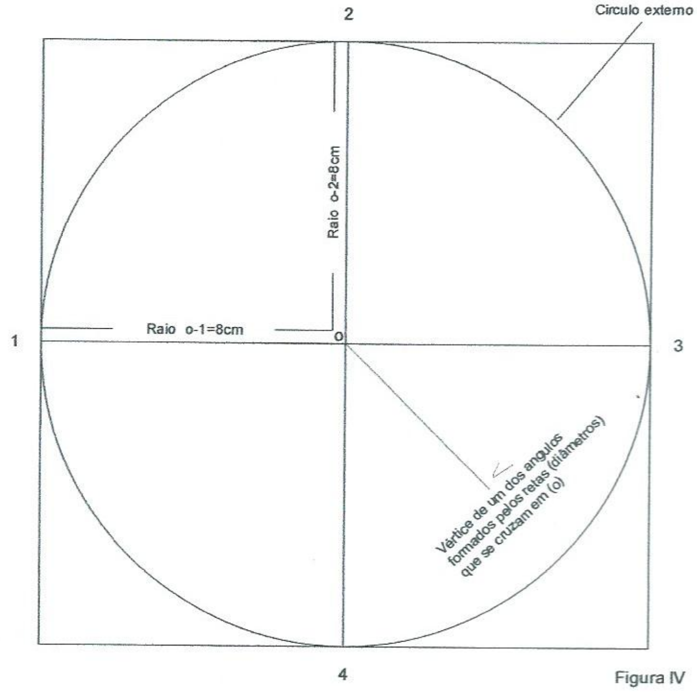


Figura IV

RETIFICAÇÃO DE UM CÍRCULO

Uma vez traçado as retas 1 – 3 e 2 – 4 (diâmetros) que divide o círculo inscrito no quadrado interno da fig. IV também em quatro partes iguais (quadrantes), traça – se os lados 1 – 2, 2 – 3, do quadrado inscrito neste círculo Fig. V.

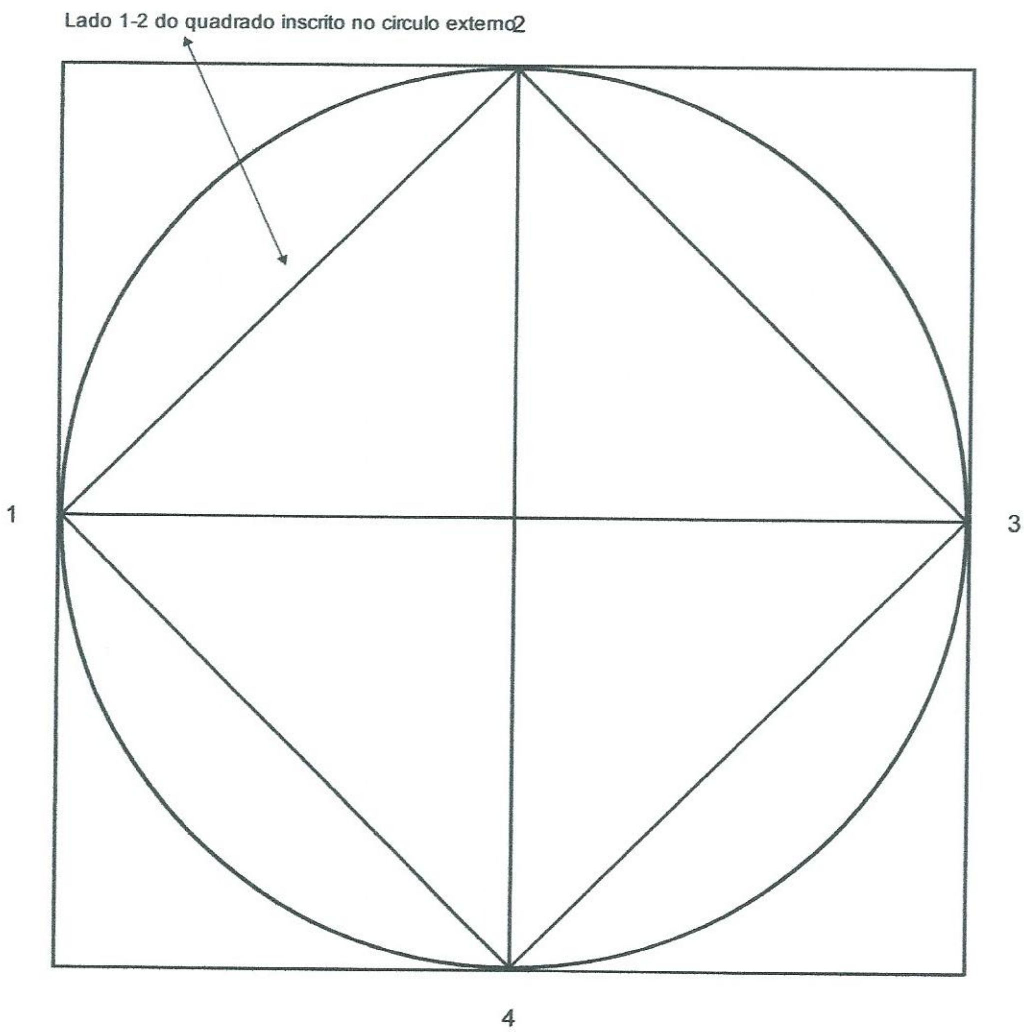


Figura V

Agora com uma abertura correspondente ao comprimento de quaisquer dos lados 1 – 2, 2 – 3, do quadrado inscrito no círculo externo da fig. V, fixa – se o compasso nos vértices 1 e 2, 2 e 3, desse quadrado traça – se as linhas que se interceptam em 5, 6. Em seguida, e a partir dos vértices dos ângulos formados pelas linhas que interceptam em 5 – 7 e 6 – 8, traça – se os diâmetros a_1 a_3 e a_2 a_4 que divide este círculo em oito partes iguais e traça – se ainda os lados $1a_1$, a_12, do octógono inscrito também neste círculo Fig. VI.

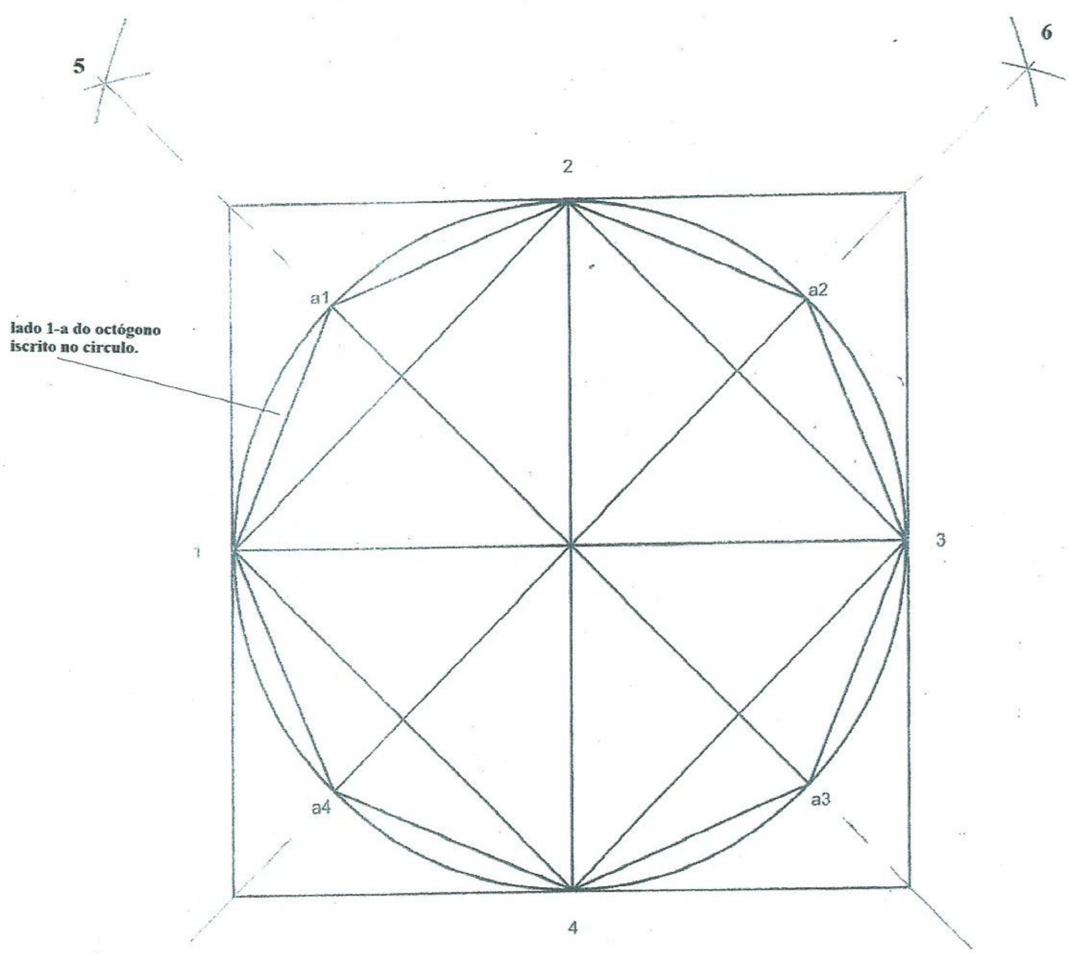


Fig. VI

Novamente com uma abertura correspondente ao comprimento de quaisquer dos lados $1a_1$, a_12, do octógono inscrito no círculo externo da Fig. VI, fixa – se o compasso nos vértices 1 e a_1, a_1 e 2 desse octógono e traça – se as linhas que interceptam em 9, 10. Em seguida, e a partir dos vértices dos ângulos formados pelas linhas que se interceptam em 9 – 13, 10 – 14, traça – se os diâmetros b_1 b_5, b_2 b_6, que divide este circulo em dezesseis partes iguais, e traça – se ainda aos lados $1b_1$, b_1, a_1, do hexadecágono inscrito também neste círculo Fig. VII.

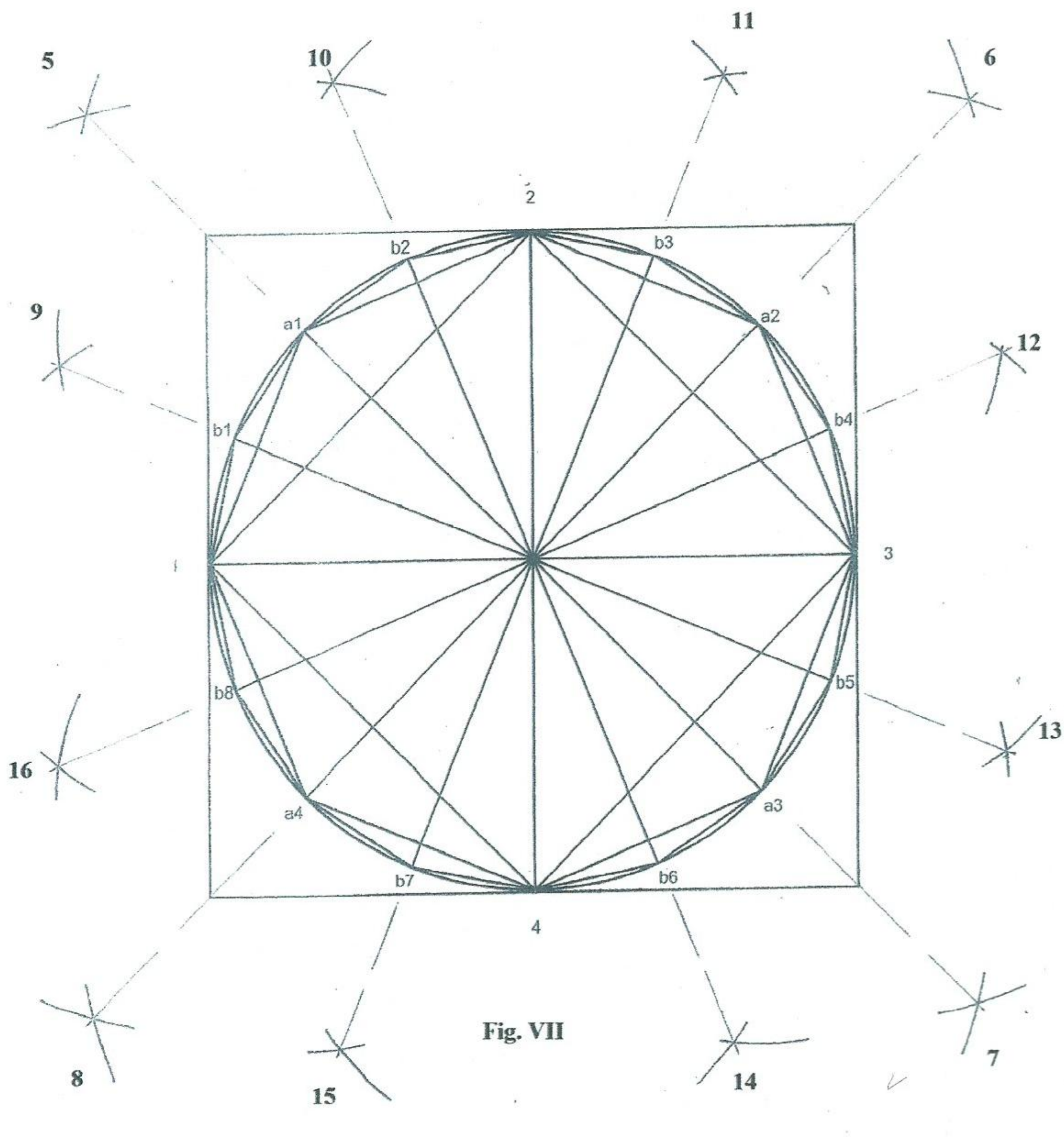


Fig. VII

Ainda com uma abertura correspondente ao comprimento de quaisquer dos lados $1b_1$, b_1 a_1 do hexadecágono inscrito no círculo externo da fig. VII fixa – se o compasso nos vértices 1 e b_1, b_1 e a_1, a_1 e b_2, desse hexadecágono e traça – se as linhas que se interceptam em 17, 18, 19. Em seguida, e a partir dos vértices dos ângulos formados pelas linhas que se interceptam em 17 – 25, 18 – 26, 19 – 27, traça – se os diâmetros c_1c_9, c_2c_{10}, c_3c_{11}, que divide este circulo em 32 partes iguais, e traça – se ainda os 32 lados $1c_1$, $c_1b_1b_1c_2$, do polígono inscrito também neste círculo fig. VIII.

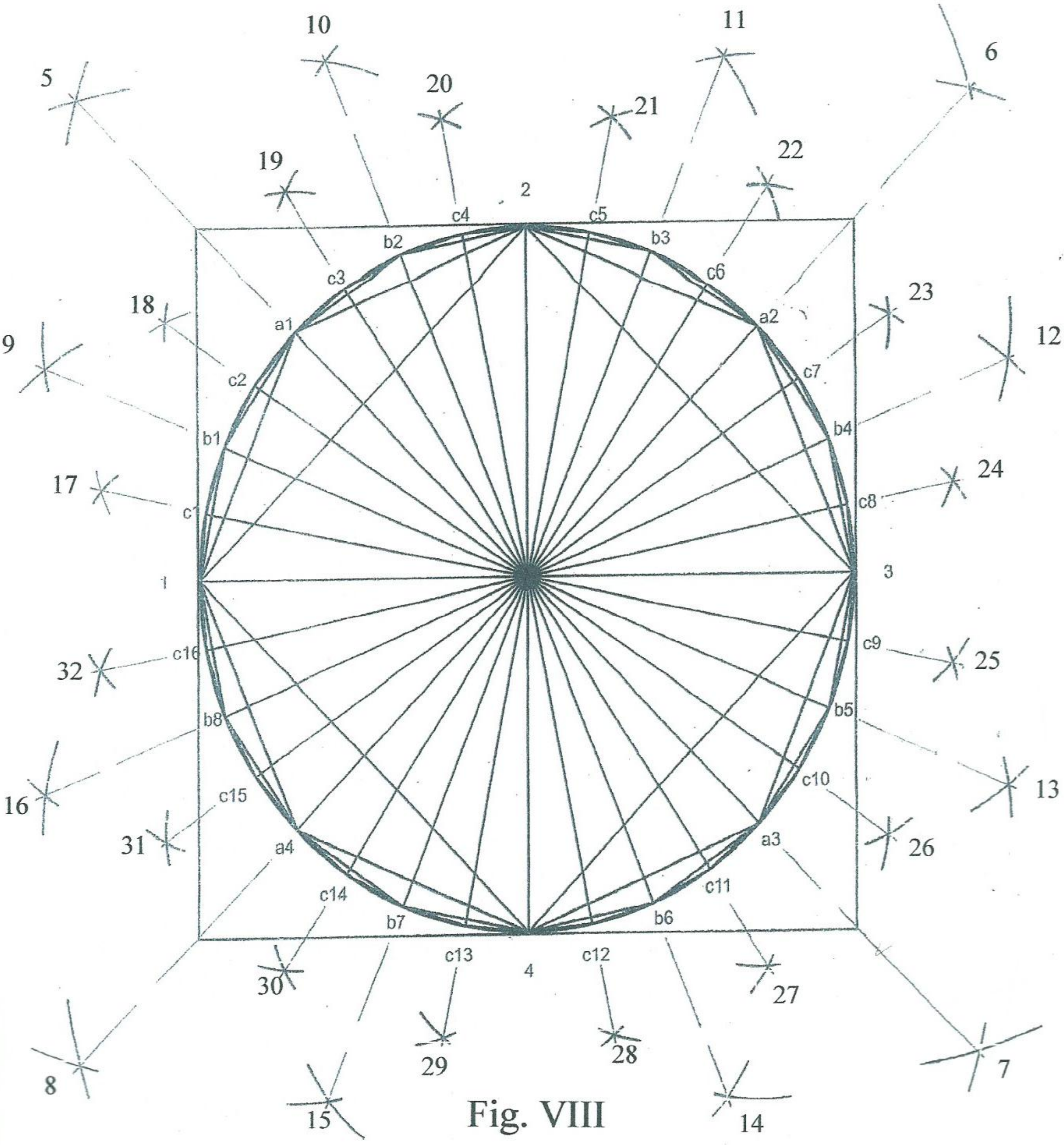


Fig. VIII

Finalmente com uma abertura correspondente ao comprimento de quaisquer dos 32 lados $1c_1$, c_1b_1, do polígono inscrito no círculo externo da fig. VIII fixa – se o compasso nos vértices 1 e c_1, c_1 e b_1, b_1 e c_2, desse polígono e traça – se as linhas que interceptam em 33, 34, 35, 36. Em seguida, e a partir dos vértices dos ângulos formados pelas linhas que se interceptam em 33 – 49, 34 – 50, 35 – 51, 36 – 52, traça – se os diâmetros d_1d_{17}, d_2d_{18}, d_3d_{19}, dividindo agora este círculo em 64 retas ou lados iguais. Fig. IX.

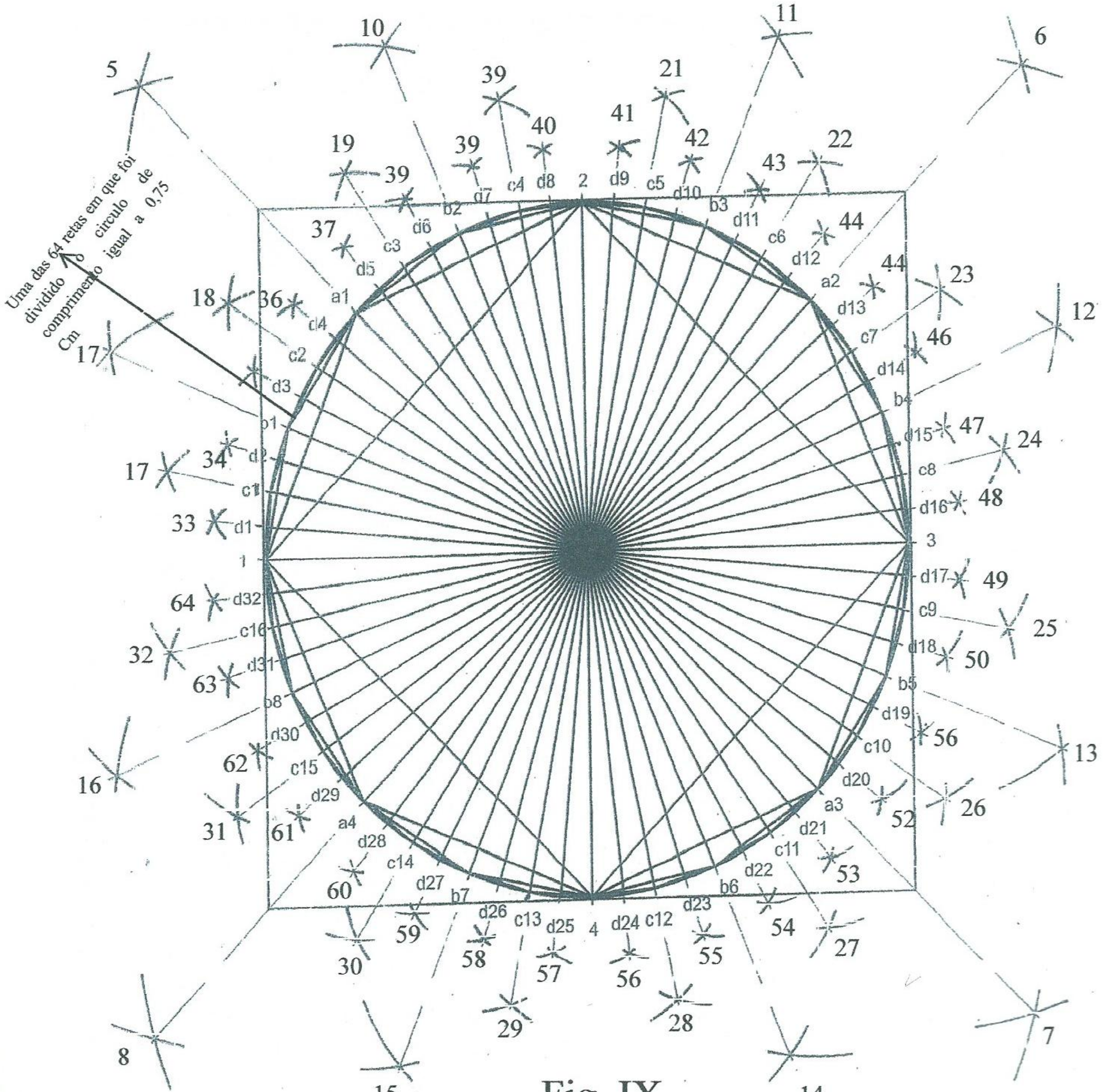


Fig. IX

Ao dividir a circunferência (C) de um círculo em 64 retas iguais o comprimento de quaisquer dessas retas é sempre igual a 64ª parte de três vezes o comprimento do diâmetro (d) desse círculo $\frac{c}{64} = \frac{3d}{64}$;

Como neste caso o comprimento do diâmetro do círculo externo da fig. IX é igual a 16 cm, pela fórmula $\frac{3d}{64}$ acha – se o comprimento de quaisquer das 64 retas em que foi dividida a circunferência desse círculo ou C= $\frac{3d}{64} = \frac{3x16}{64} = 0{,}75$ cm, (para constatar mede – se o comprimento do diâmetro do círculo externo da Fig. IX e também o comprimento de quaisquer das 64 retas $1d_1$, d_1c_1 em que foi dividida a circunferência desse círculo, ver Fig. IX;

Sendo o comprimento de quaisquer das 64 retas, em que foi dividida a circunferência do círculo externo da Fig. IX igual a 0,75 cm, o comprimento da circunferência desse círculo é igual a 64 x 0,75 = 48 cm;

"Como os comprimentos do diâmetro e da circunferência de um círculo inscrito em um quadrado são sempre iguais a um e três quartos do comprimento desse quadrado, medindo – se o comprimento do quadrado interno da figura IX acha – se os comprimentos do diâmetro e da circunferência do círculo inscrito neste quadrado ou d= $^1/_4$ de 64=16 cm e C= $^3/_4$ de 64= 48 cm".

RELAÇÃO ENTRE O DIÂMETRO E A CIRCUNFERÊNCIA DE UM CÍRCULO

a) Para constatar a relação entre os comprimentos do diâmetro e da circunferência de um círculo divide – se cada uma das 64 retas ($1d_1$, d_1c_1) em que foi dividida a circunferência do círculo externo da Fig. IX em cinco partes iguais, correspondendo cada uma, a um ângulo de magnitude igual a um grau geométrico Fig. X quadrantes um, dois, três e quatro respectivamente, em seguida usando – se as fórmulas $R=\frac{d}{64}$ e $C=\frac{\hat{a}R3}{5}$ acha – se o comprimento de quaisquer das 320 (64x5=320) partes em que foi dividida a circunferência desse círculo ou $R=\frac{16}{64}$=0,25 cm e $C=\frac{1x0{,}25x3}{5}$=0,15cm, sendo:

R=64ª parte do comprimento do diâmetro do círculo externo da Fig. X.

d= Comprimento do diâmetro do círculo externo da Fig. X.

C= Comprimento de quaisquer das 320 partes em que foi dividida a circunferência do círculo externo da Fig. X.

â = Medida do ângulo correspondente à 320º parte da circunferência do círculo externo da Fig. X dada em graus geométricos.

b) Como o comprimento de quaisquer das 320 partes em que foi dividida a circunferência do círculo externo da Fig. X é igual a 0,15 cm o comprimento da circunferência desse círculo é igual a 320 x 0,15 = 48 cm (para constar mede – se também o comprimento de quaisquer das 320 partes em que foi dividida a circunferência desse círculo ver Fig. X).

c) Sendo os comprimentos do diâmetro (d) e da circunferência (C) do círculo externo da Fig. X iguais a 16 e 48 cm respectivamente, o comprimento da circunferência de um círculo é sempre igual a três vezes o comprimento do seu diâmetro C=3d=3x16=48 cm.

d) Uma vez determinados os comprimentos da circunferência (C) e do diâmetro (d) de um círculo, neste caso 48 e 16 cm respectivamente, acha – se o valor da razão que determina a relação entre os comprimentos do diâmetro e da circunferência de um círculo já denominada (Pi) ou $\pi = \frac{c}{d} = \frac{48}{16} = 3$

e) Como o valor de π é igual (3) e toda circunferência de um círculo é igual a 320 graus geométricos, para achar o comprimento da circunferência de um círculo ou o comprimento de partes da circunferência de um círculo usa – se a fórmula $C=\frac{\hat{a}R3}{5}$, porém da melhor forma ou $C=\frac{\hat{a}R\pi}{5}$, sendo:

C= Comprimento da circunferência ou de partes da circunferência de um círculo.

â = Medida do ângulo correspondente a circunferência de um círculo ou a qualquer parte da circunferência de um círculo dada em graus geométricos.

$R=\frac{d}{64}$ (d= comprimento do diâmetro do círculo)

$\pi=3$

Ex: Para achar o comprimento de qualquer parte da circunferência do círculo externo da Fig. IX mede – se o ângulo correspondente à parte desejada, neste caso 40° gg^e e pela fórmula C= $\frac{\hat{a}R\pi}{5}$, tem – se â = 40, R = 0,25, π = 3 e C= $\frac{40x0,25x3}{5}$ = 6 cm.

Para constatar mede – se os comprimentos das retas 1 – d_1, d_1 – c_1, c_1 – d_2, correspondentes à magnitude do ângulo de 40° gg^e. Fig. IX.

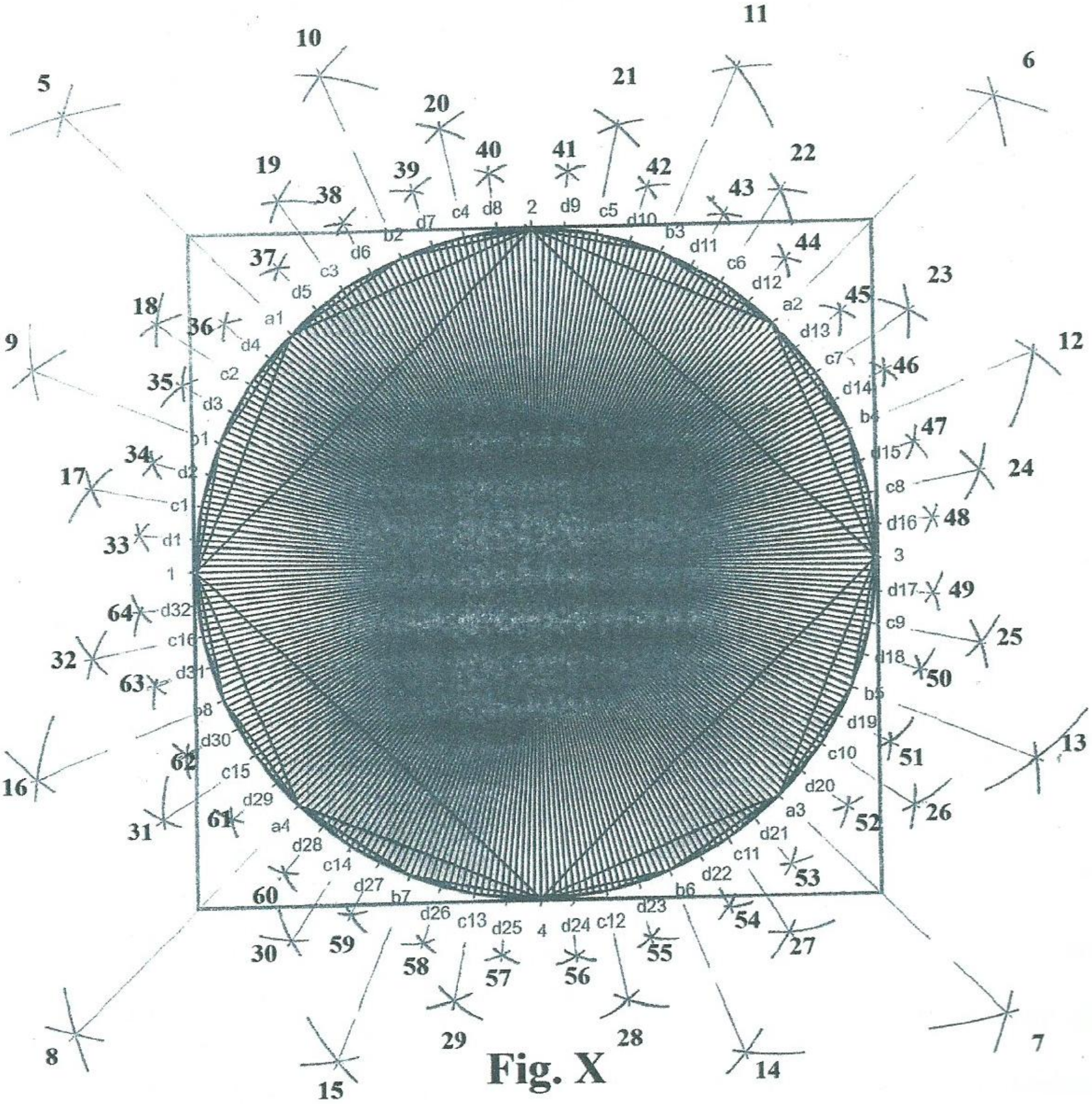


Fig. X

Como grau geométrico obtido em função da 320ª parte da circunferência do círculo é uma unidade decimal, um ângulo cuja medida não seja inteira, por exemplo, um grau e cinco milésimos representa – se por 1, 005 gg^e (gg^e= grau geométrico).

Nota – Para medir ângulos em graus geométricos usa – se o transferidor geométrico anexo.

DA IRRACIONALIDADE DO π

Em datas passadas matemáticos postularam a irracionalidade de π. Porém usando –se o raio de um círculo como unidade consequentemente o diâmetro desse círculo é igual $1 + 1=2$.

Como o comprimento do diâmetro de um círculo inscrito em um quadrado é sempre igual ao comprimento de quaisquer dos lados desse quadrado, logo um círculo de diâmetro 2 pertence a um quadrado de 2 cm de lado Fig. I.

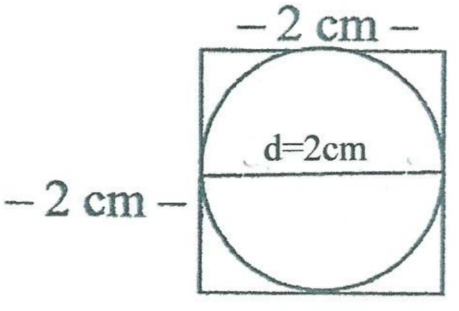


Fig. I

Sendo os comprimentos do diâmetro e da circunferência de um círculo inscrito em um quadrado sempre igual a 1 e $^3/_4$ do comprimento desse quadrado, medindo – se o quadrado da Fig. I tem – se d= $^1/_4$ de 8 = 2 cm e c= $^3/_4$ de 8= 6 cm ou c= d π = 2.3= 6 cm.

Também como a área de um círculo inscrito em um quadrado é sempre igual a $^3/_4$ da área desse quadrado, neste caso temos: área do quadrado da Fig. I igual 2.2= 4cm^2 e a área do círculo inscrito neste quadrado igual $^3/_4$ de 4=1.3=3cm^2. Porém, como a área de um círculo também é dada pelo produto do quadrado do raio r^2 por π (produto da área de um quadrado de lados iguais ao raio do círculo por π), neste caso temos: r^2= um quadrado de 1 cm de lado Fig. II.

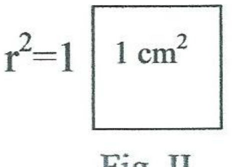


Fig. II

Sendo a área de um círculo dada pelo produto da área de um quadrado de lados iguais ao raio do círculo por π ou A=$\boxed{1\text{cm}^2}$, π= 1,3=3cm^2, o comprimento de quaisquer dos lados do quadrado da Fig. II é igual a $\sqrt{1} = 1$ cm. Portanto, quando o número 3 se comporta como razão, como π, não tem nada de irracional, demonstra apenas a quantidade de vezes o comprimento da circunferência de um círculo contém o comprimento do diâmetro desse círculo. Assim, a improvável irracionalidade de π consiste em se tentar determinar o comprimento do lado do quadrado correspondente ao comprimento do raio de um círculo extraindo a raiz quadrada de $\sqrt{\pi}$.

RELAÇÃO ENTRE AS ÁREAS DOS CÍRCULOS E QUADRADOS
(QUADRATURA DO CÍRCULO)

Uma vez determinado a retificação do círculo externo Fig. IX, que mede 8 e 48 cm de raio e perímetro respectivamente e o valor exato de Pi ou $\pi = 3$, determina – se a relação entre as áreas dos círculos e quadrados da seguinte forma: como a metade do comprimento de quaisquer dos lados de um quadrado é sempre igual ao comprimento do raio do círculo inscrito neste quadrado Fig. II e IV respectivamente, a área de um quadrado de lados iguais ao raio de um círculo é dada por $l^2 = r^2$ (l = lados do quadrado de comprimentos iguais ao raio do círculo) neste caso $l = r = 8$ cm e $8^2 = 64$ cm^2, Fig. XI.

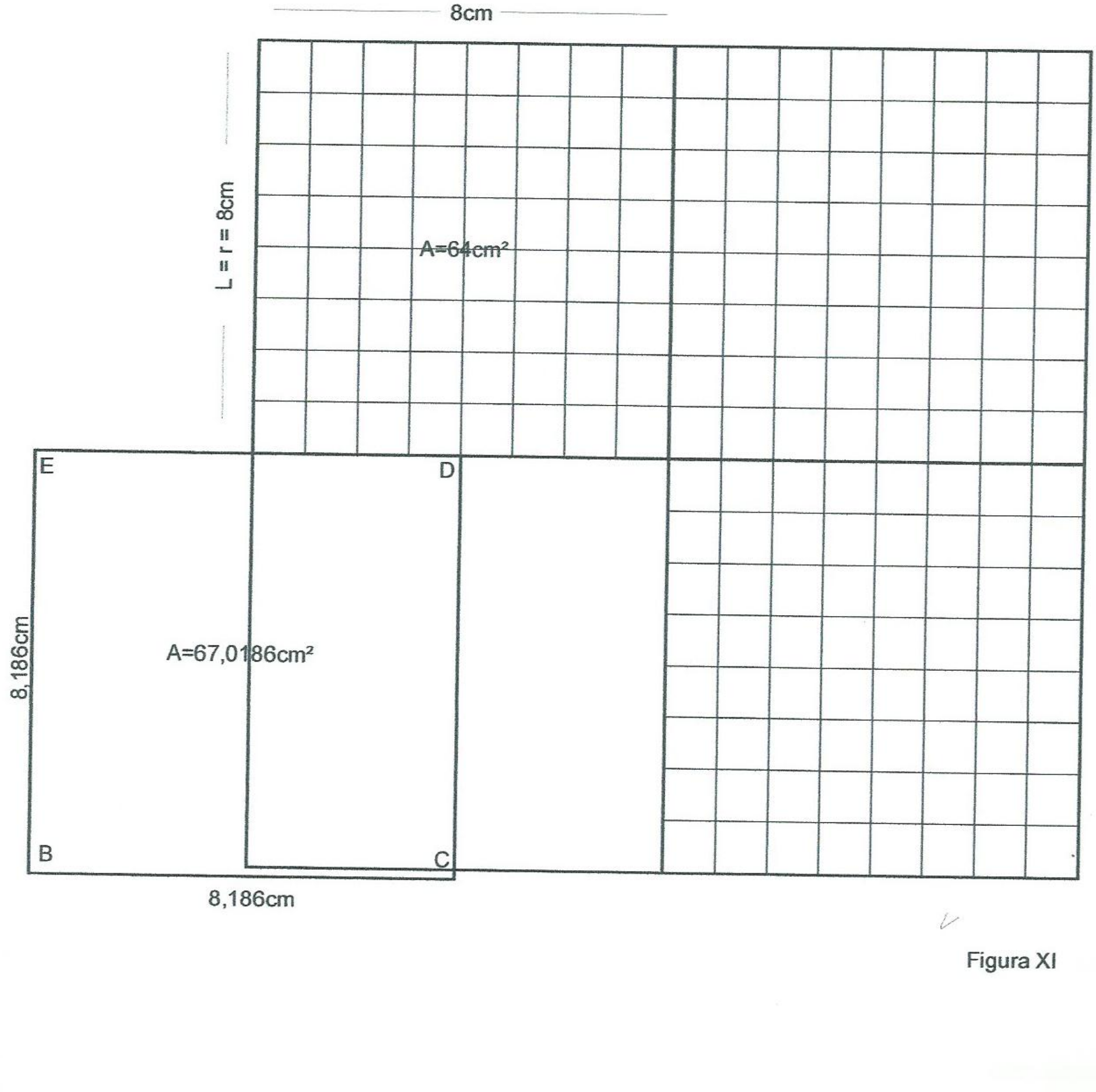


Figura XI

Como a área de um círculo é dada pelo produto do quadrado do raio r^2 por π (produto da área de um quadrado de lados iguais ao raio do círculo por π), a área do círculo inscrito no quadrado da Fig. IV é igual ao produto da área de um quadrado de lados iguais ao raio desse círculo por π ou $= 8^2 . \pi = 64.3 = 192\ cm^2$ Fig. XII.

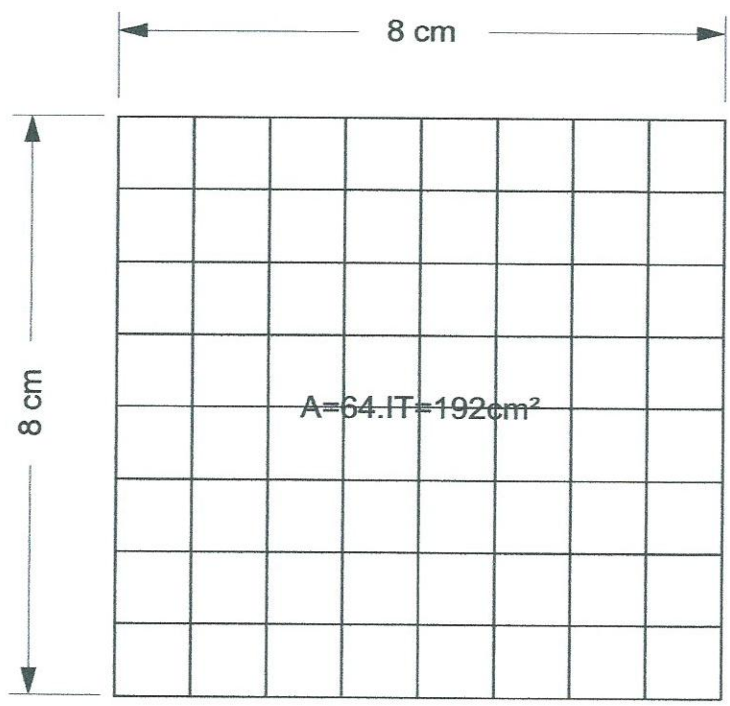


Figura XII

Como quaisquer dos quadrados internos Fig. II mede 16 cm de lados, a área de quaisquer desses quadrados é igual a $16 \times 16 = 256\ cm^2$. Sendo a área de quaisquer dos círculos inscritos nos quadrados internos $= 192\ cm^2$, pode – se afirmar que:

"A área de um círculo inscrito em um quadrado é sempre igual a $^3/_4$ da área desse quadrado".

Para confirmar a relação entre as áreas dos círculos e quadrados determina – se agora a área de quaisquer dos quadrantes do círculo da seguinte forma: como o perímetro de quaisquer dos quadrantes dos círculos externos mede 12 cm Fig. IX constrói – se o triângulo ABC cuja a altura (h) e base (b) tenham comprimentos (8 e 12 cm) iguais ao raio e perímetro do quadrante do círculo e pela fórmula A = h. $^{b}/_{2}$ acha – se a área do quadrante desse círculo que é igual a área do triângulo ABC ou A= $\frac{8\,.\,12}{2}$ = 48 cm^2 Fig. XIII.

Já para confirmar a exatidão da área do quadrante do círculo constrói – se o retângulo ABCD de lados (a^1 e b^1) e comprimentos iguais ao raio e perímetro do quadrante do círculo e pela fórmula A = a.b tem – se A= 8.12=96 cm^2 valor igual duas vezes a área do triângulo ABC e $\frac{96}{2}$ = 48 cm^2 valor igual a área do quadrante do círculo Fig. XIII.

Sendo a área de quaisquer dos quadrantes dos círculos externos fig. IV igual a 48 cm^2 a área de quaisquer desses círculos é igual 48.4 = 192 cm^2.

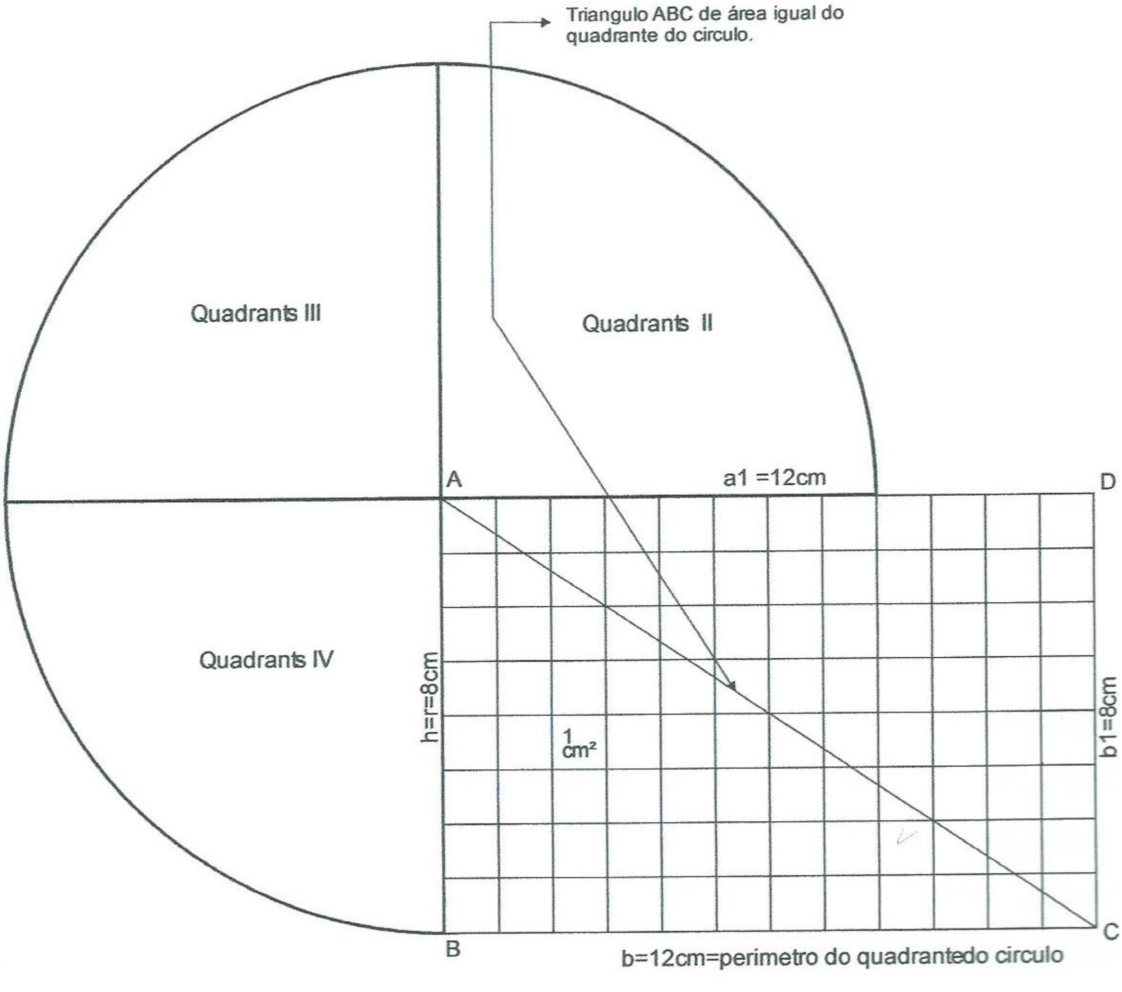


Figura XIII

Como quaisquer dos círculos externos fig. IV tem perímetro igual a 48 cm e área igual a 192 cm^2, um quadrado A_2 B_2 C_2 D_2 de perímetro igual do círculo inscrito ou 12 cm de lados tem área igual a $^3/_4$ da área desse círculo ou 144 cm^2 fig. XIV.

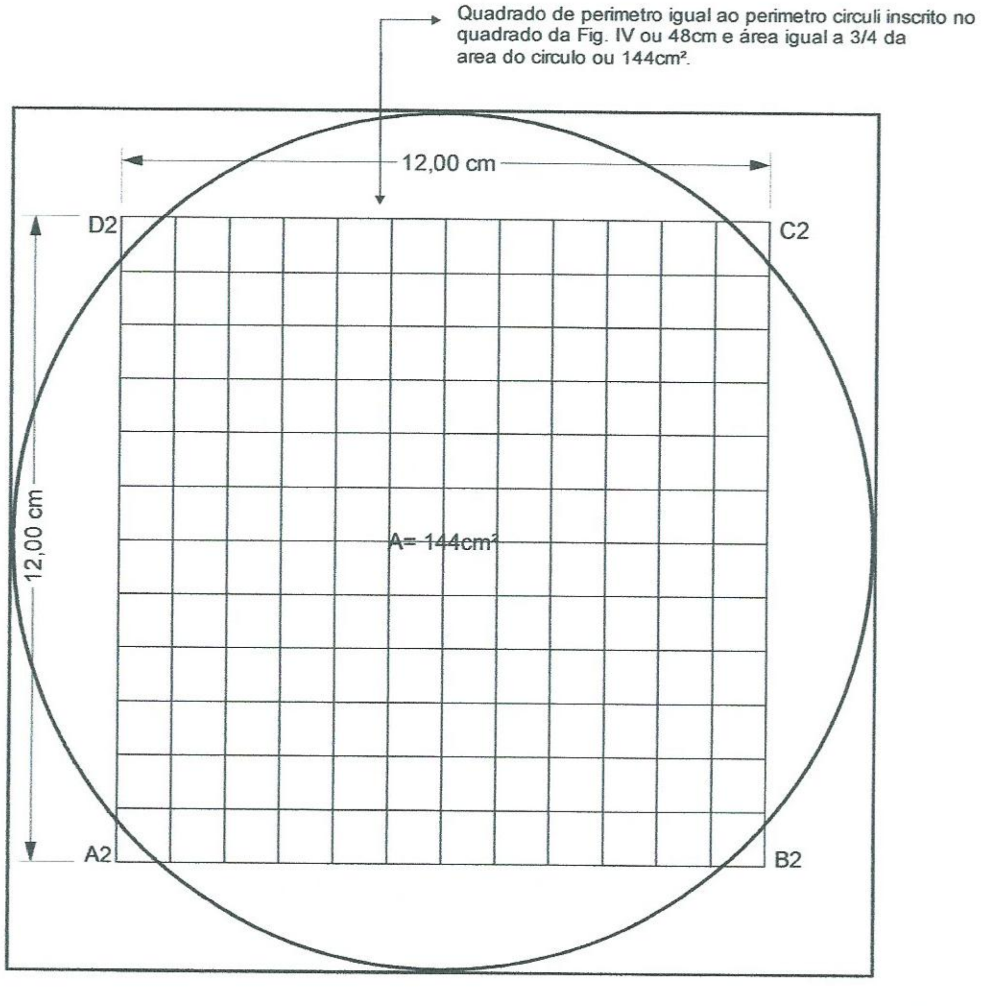


Figura XIV

"Assim como a área de um círculo inscrito em um quadrado é sempre igual a $^3/_4$ da área desse quadrado. A área de um quadrado de perímetro igual do círculo inscrito também é igual a $^3/_4$ da área desse círculo."

COMENTÁRIOS:

Como o raio de quaisquer dos círculos externos fig. IV, mede 8 cm de comprimento, pode – se observar que ao usar o valor arbitrário de (π) ou π = 3,1415 tanto o valor da área desse círculo, quanto o valor da área de quaisquer dos quadrados menores não correspondem aos fatos matemáticos já demonstrados. Pois usando – se o valor π = 3,1415 a área de quaisquer dos círculos externos fig. IV será de 201,056 cm^2 e a área de quaisquer dos quadrados menores igual a 67,0186 cm^2, área que corresponde a um quadrado de $\sqrt{67,0186}$ = 8,186 cm de lados ver quadrado BCDE fig. XII.

2ª PARTE – AS CÔNICAS –HIPÉRBOLES, ELIPSES E PARÁBOLAS

"A matemática como ciência não pode ser sua própria inquisidora. Pois não se concebe, nos dias atuais, a geometria fixando alfinetes para construir elipses".

"Denomina – se hipérbole as curvas que num mesmo plano (quadrado) os comprimentos dos seus eixos também são sempre iguais entre si e ao comprimento de quaisquer dos lados do quadrado, porem mais abertas que os círculos".

Quando os eixos 1 – 3 ou 2 – 4 (diâmetros) de um círculo inscrito em um quadrado fig, I permanecem posicionados na metade dos lados deste quadrado tem – se um arco de hipérbole fig. II.

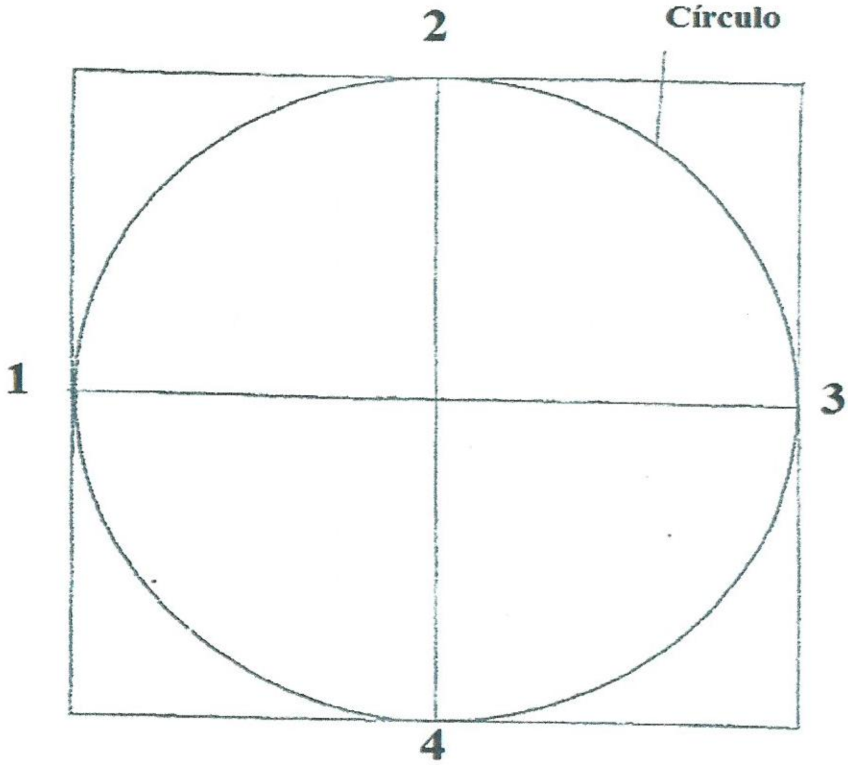


Fig. I

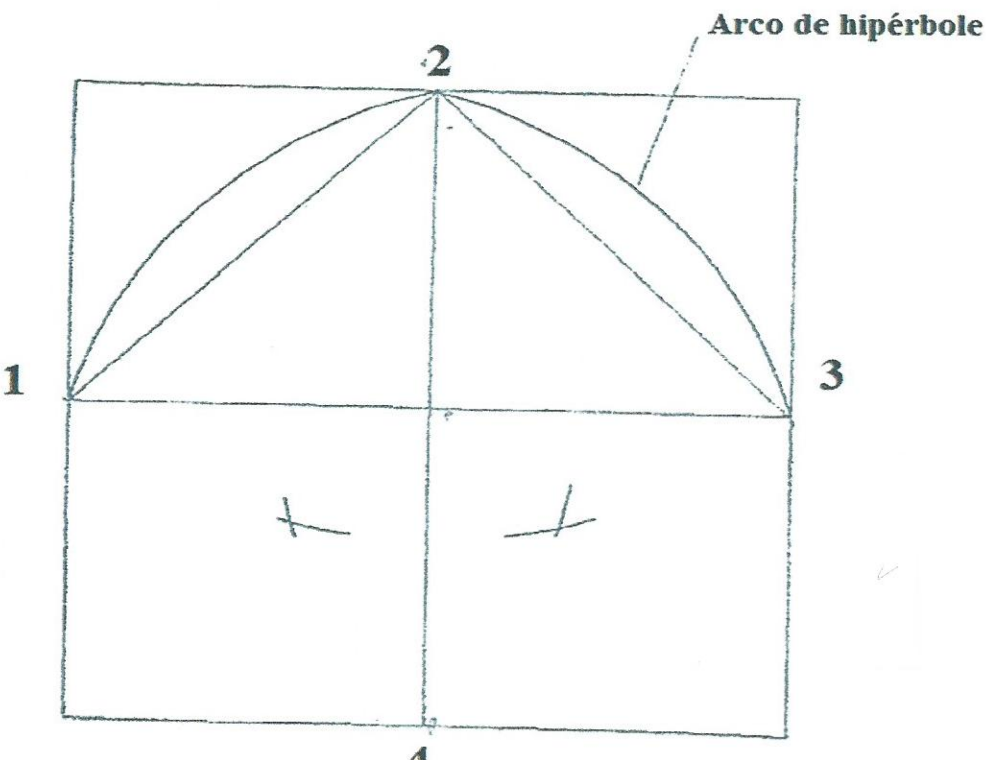


Fig. II

CONSTRUÇÃO E RETIFICAÇÃO DE UMA HIPÉRBOLE

a- Para construir uma hipérbole constrói – se novamente o quadrado da fig. I que mede internamente 16 cm de lados, depois traça – se as linhas 1, 2, 3 e 4 que divide ao meio cada lado do quadrado fig. III.

b- Traça – se agora as retas 1 – 3 e 2 – 4 que divide este quadrado em quatro quadrados iguais, determinam o foco (o) e os eixos 1 – 3 e 2 – 4 da hipérbole a ser construída fig. IV.

c- Traça – se ainda os lados 1 – 2, 2 – 3... do losango inscrito no quadrado e com uma abertura correspondente ao comprimento de quaisquer dos lados 1 – 2... do losango fixa – se o compasso nos vértices 1, 3, 4 e 2 desse losango e traça – se as linhas que se interceptam em E, F, G e H respectivamente. Novamente com a mesma abertura fixa – se o compasso nos vértices dos ângulos formados pelas linhas que se interceptam em E - H e G - F e constrói – se a hipérbole inscrita no quadrado fig. V.

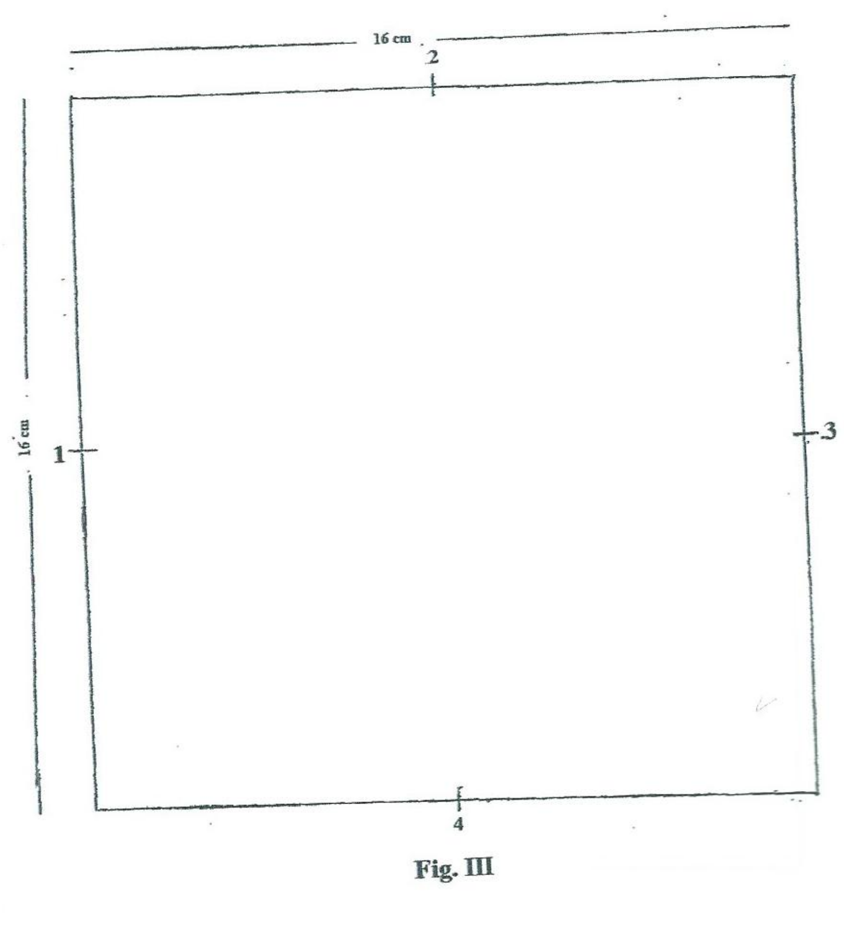
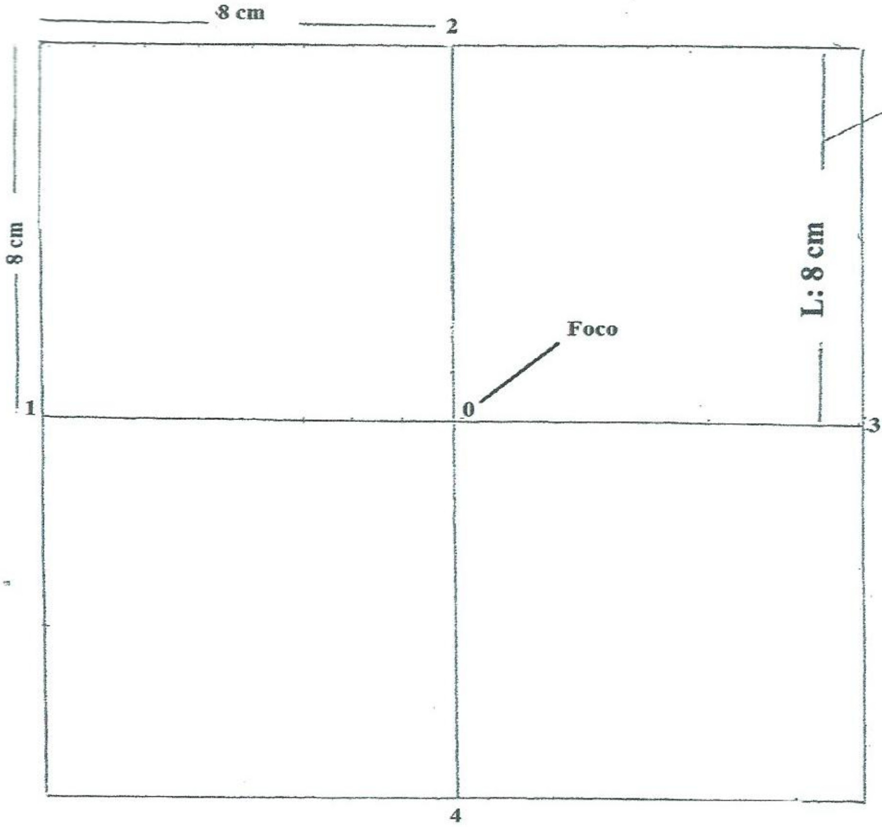
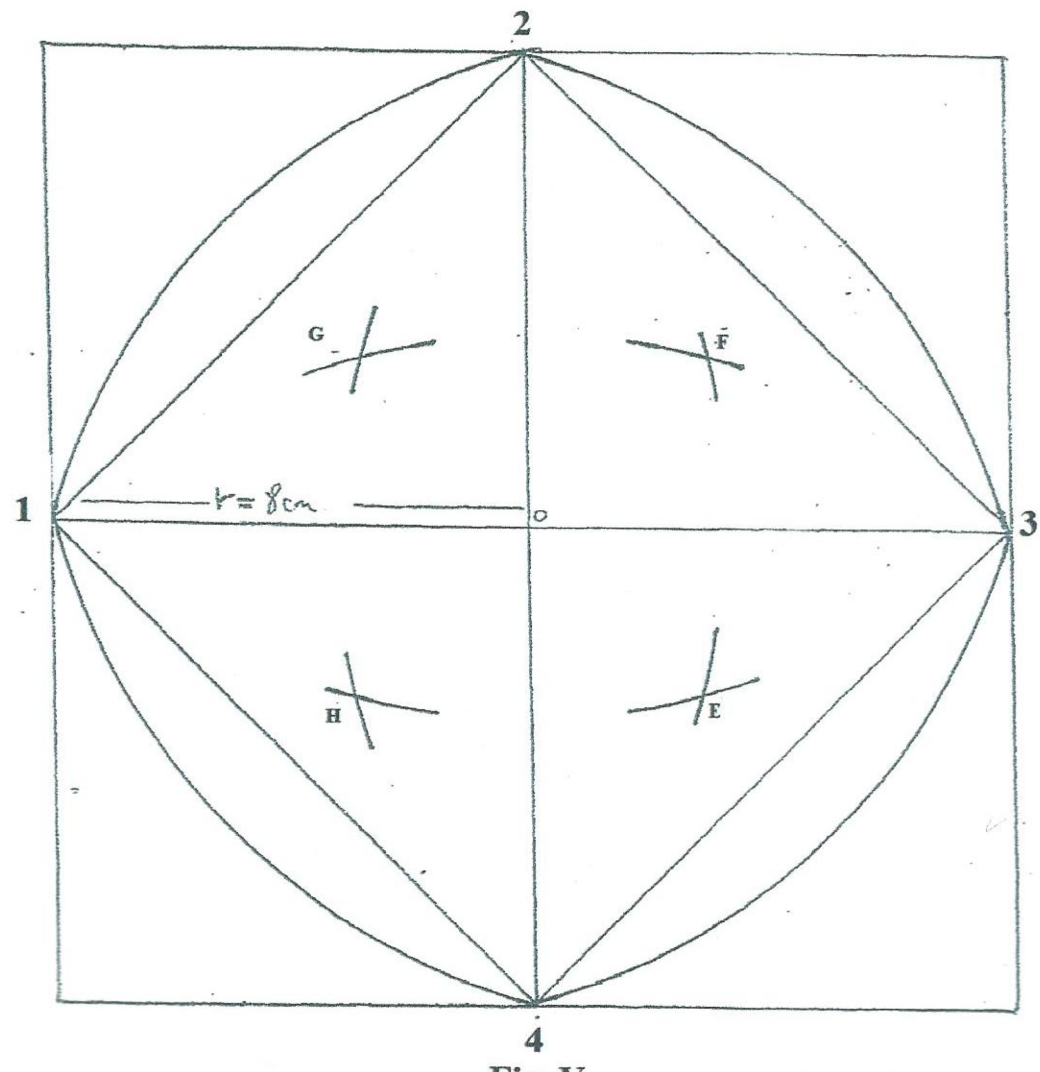


Fig. III


8 cm
2
8 cm
L: 8 cm
Foco
1
0
3
4
Metade do lado L do quadrado de comprimento (8 cm)igual ao comprimentos de quaisquer dos raios medio
0 -1, 0-2. fig. VI


2
G
F
1
r = 8cm
0
3
H
E
4
Fig. V

RETIFICAÇÃO DE UMA HIPÉRBOLE

Ainda com a mesma abertura (corresponde ao comprimento de qualquer dos lados do losango) fixa – se o compasso nos vértices 1, 2, 3 e 4 do losango e traça – se as linhas que interceptam em 5, 6, 7 e 8 respectivamente. Em seguida, e a partir dos vértices dos ângulos formados pelas linhas que se interceptam em 5 – E, 6 – H, 7 – G e 8 – F traça – se as linhas *s*, s_1, s_2 e s_3 que divide esta hipérbole em oito partes iguais e traça – se ainda os lados 1 – a, a – 2, ...do octógono inscrito na hipérbole fig. VI.

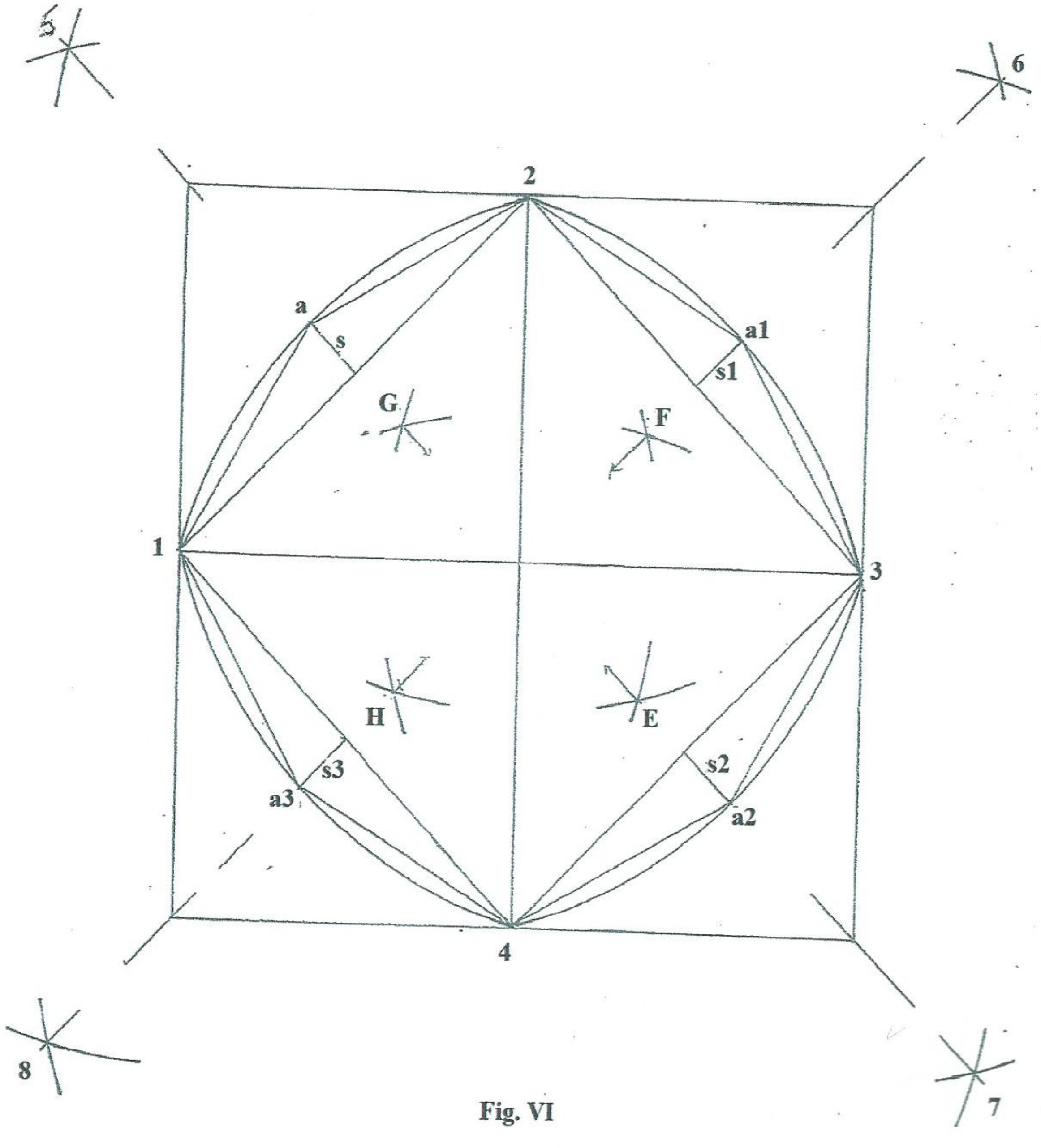


Fig. VI

Agora com uma abertura correspondente ao comprimento de quaisquer dos lados 1–a, a – 2,... do octógono inscrito na hipérbole da Fig. VI fixa – se o compasso nos vértices 1 e a, a e 2... desse octógono e traça – se as linhas que se interceptam em 9, 10, 11, 12... Em seguida, e a partir dos vértices dos ângulos formados pelas linhas que se interceptam em 9 – E, 10 – E, 11 – H,... Traça – se as linhas s_4, s_5, s_6,... que divide esta hipérbole em dezesseis partes iguais e traça – se ainda os lados 1 - b, b – a, a – b_1... do hexadecágono inscrito na hipérbole Fig. VII.

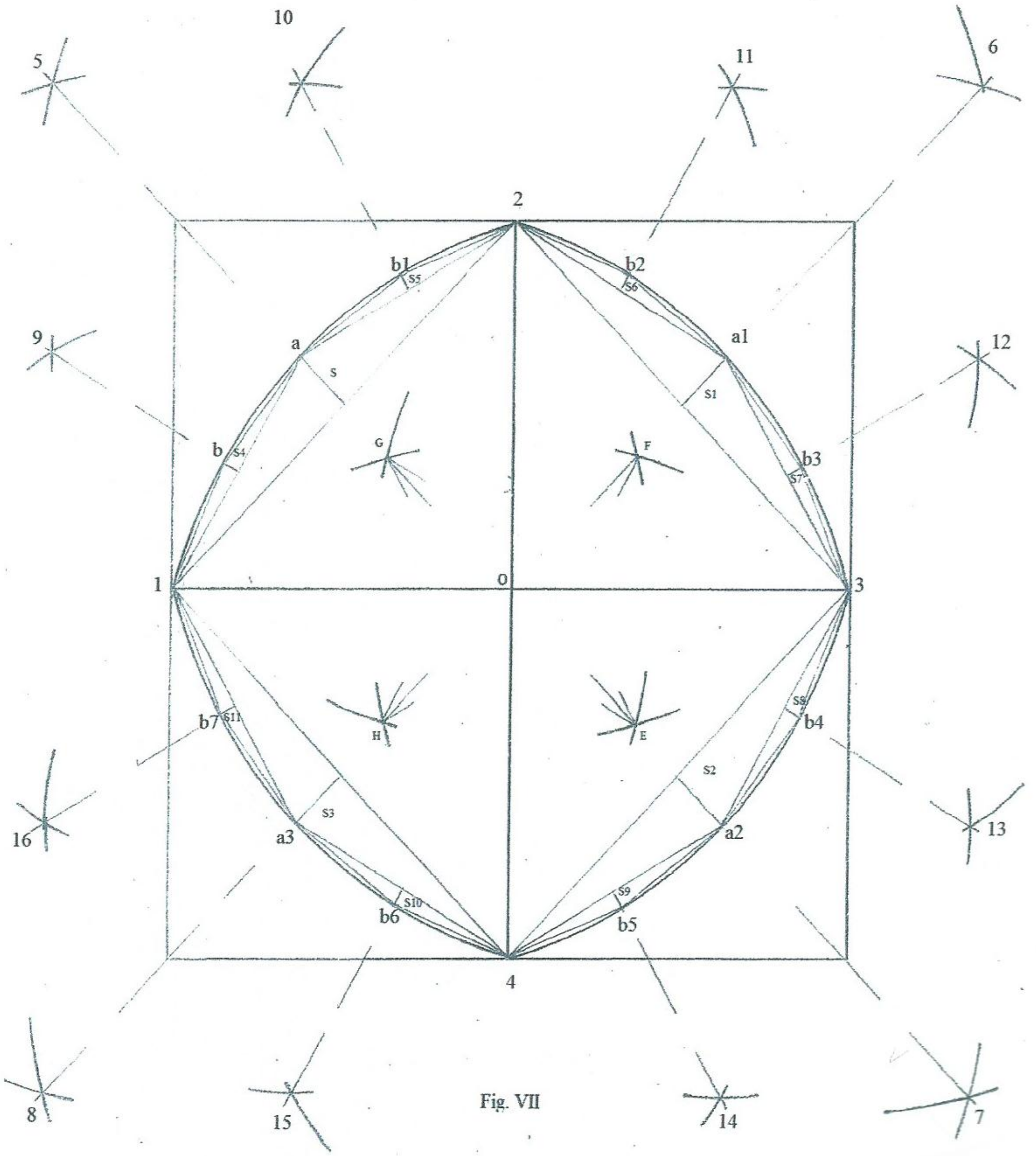


Fig. VII

Novamente com uma abertura correspondente ao comprimento de quaisquer dos lados 1 – b, b – a, ... do hexadecágono inscrito na hipérbole da Fig. VII fixa – se o compasso nos vértices 1 e b, b e a, a – b_1,... do hexadecágono e traça – se as linhas que se interceptam em 17, 18, 19, 20 ... Em seguida, e a partir dos vértices dos ângulos formados pelas linhas que se interceptam em 17 – E, 18 – E, 19 – E,..: 21 – H, 22 – H... traça – se as linhas s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}... que divide esta hipérbole em trinta e duas partes iguais e traça – se ainda os 32 lados 1 – c, c – b, b – c_1, c_1 – a... do polígono inscrito também na hipérbole Fig. VIII.

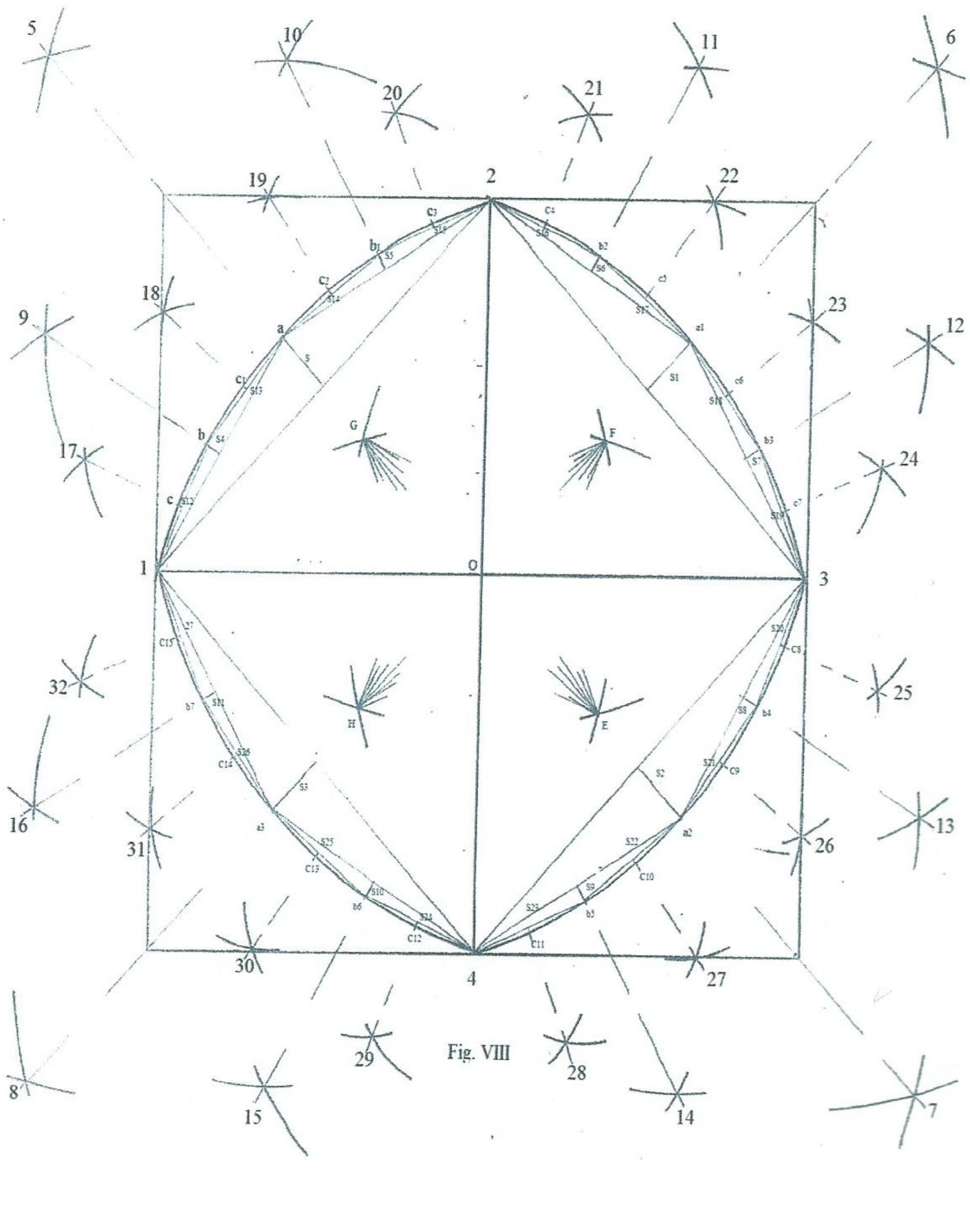


Fig. VIII

Finalmente com uma abertura correspondente ao comprimento de quaisquer dos 32 lados 1 – c, c – b, b – c_1... do polígono inscrito na hipérbole da Fig. VIII fixa – se o compasso nos vértices 1 e c, c e b, b e c_1... desse polígono e traça – se as linhas que se interceptam 33, 34, 35, 36, ... Em seguida, e a partir dos vértices dos ângulos formados pelas linhas que se interceptam em 33 – E, 34 – E, 35 – E... 41 – H, 42 – H... traça – se as linhas s_{28}, s_{29}, s_{30}, s_{31}... dividindo agora esta hipérbole em 64 retas iguais Fig. IX.

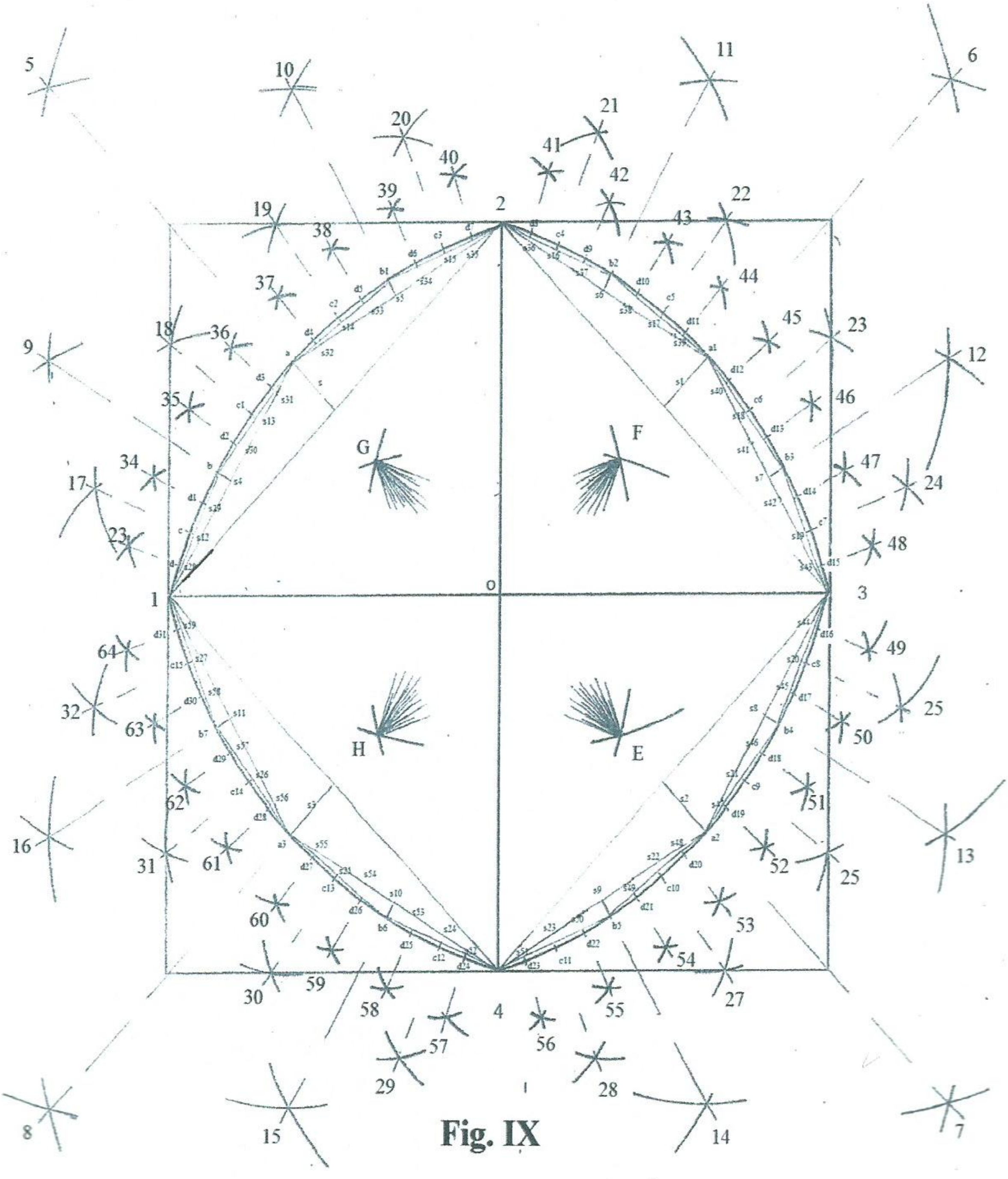


Fig. IX

“Ao dividir o perímetro (P) de uma hipérbole em 64 retas iguais o comprimento de quaisquer dessas retas é sempre igual a 64ª parte de três vezes a média dos comprimentos dos eixos da hipérbole também denominado diâmetro médio (dm) ou $\frac{P}{64} = \frac{3dm}{64}$.”

Como neste caso os comprimentos dos eixos da hipérbole são iguais a 16 cm, seu diâmetro médio $dm = \frac{16+16}{2} = 16$ cm. Sendo o diâmetro médio da hipérbole da Fig. V igual a 16 cm pela fórmula $\frac{3dm}{64}$ acha – se o comprimento de quaisquer das 64 retas em que foi dividido o perímetro da hipérbole da Fig. IX ou $\frac{3x16}{64} = 0,75$ cm (para confirmar mede – se os comprimentos dos eixos da hipérbole e também o comprimento de quaisquer das 64 retas 1 – d, d – c, c – d_1... em que foi dividido o perímetro da elipse Fig. IX)

“Como o comprimento do perímetro de uma hipérbole é dado pelo produto da média dos comprimentos dos seus eixos por π ou P=dmπ. O comprimento da circunferência de um círculo de diâmetro igual a média dos comprimentos dos eixos de uma hipérbole é sempre igual ao comprimento do perímetro dessa hipérbole ou C=dmπ=P”.

RELAÇÃO ENTRE OS COMPRIMENTOS DOS EIXOS E O PERÍMETRO DE UMA HIPÉRBOLE

Para confirmar a relação existente entre os comprimentos dos eixos e o perímetro de uma hipérbole divide – se cada uma das 64 retas 1 – d, d – c, c – d_1,... em que foi dividido o perímetro da hipérbole da Fig. IX em cinco partes iguais, correspondendo também cada uma, a um ângulo de magnitude igual a um grau geométrico Fig. X. Em seguida pelas fórmulas $R = \frac{\text{dm}}{64}$ e $P = \frac{\hat{a}R\pi}{5}$ acha – se o comprimento de quaisquer das 320 partes em que foi dividido o perímetro da hipérbole ou $R = \frac{16}{64} = 0{,}25\text{cm}$ e $P = \frac{1\,\text{x}0{,}25\text{x}3}{5} = 0{,}15$ cm, sendo:

R= 64ª parte da média dos comprimentos dos eixos da hipérbole da Fig. X.

dm= Diâmetro médio (média dos comprimentos dos eixos da hipérbole da Fig. X).

P = Comprimento de quaisquer das 320 partes em que foi dividido o perímetro da hipérbole da Fig. X.

â= Ângulo correspondente à 320ª parte da hipérbole da Fig. X medido em um círculo de diâmetro (dm) igual a média dos comprimentos dos eixos da hipérbole Fig. XI.

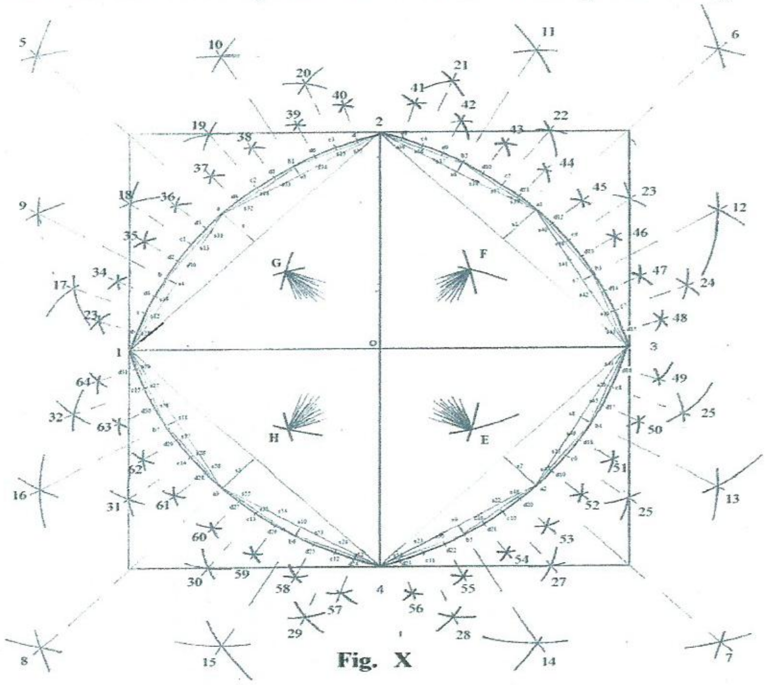


Fig. X

"Como o comprimento de quaisquer das 320 partes em que foi dividido o perímetro da hipérbole da Fig. X é igual a 0,15 cm, o comprimento do perímetro dessa hipérbole é igual a 320 x 0,15=48 cm (para confirmar mede – se o comprimento de quaisquer das 320 partes em que foi dividido o perímetro da hipérbole da Fig. X).

Como o perímetro de uma hipérbole é sempre igual ao perímetro de um círculo de diâmetro igual a média dos comprimentos dos eixos dessa hipérbole, para achar o comprimento do perímetro (P) de uma hipérbole ou o comprimento de partes do perímetro de uma hipérbole constrói – se um círculo de diâmetro (dm) igual a média dos comprimentos dos eixos da hipérbole e pela fórmula $P = \frac{\hat{a}R\pi}{5}$ acha –se o comprimento do perímetro de uma hipérbole ou o comprimento de pares do perímetro de uma hipérbole, sendo:

P = comprimento do perímetro de uma hipérbole ou de partes do perímetro de uma hipérbole.

â= ângulo correspondente ao perímetro de uma hipérbole ou a qualquer parte do perímetro de uma hipérbole medido em um círculo de diâmetro igual a média dos comprimentos dos eixos da hipérbole.

$R = \frac{\text{dm}}{64}$ (dm = média dos comprimentos dos eixos da hipérbole)

$\pi = 3$

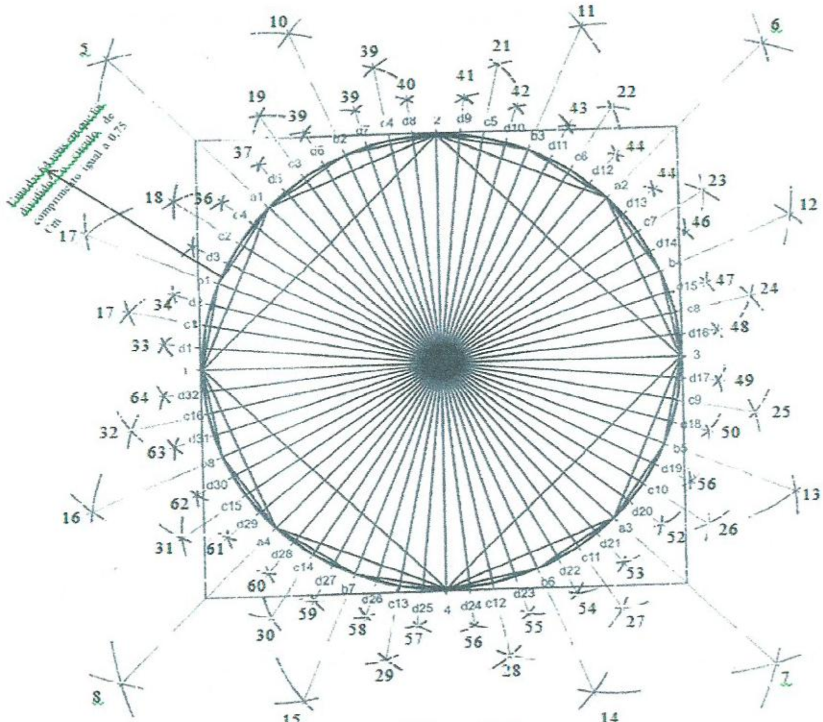


Fig. XI

Exemplo: Para achar o comprimento de qualquer parte do perímetro da hipérbole da Fig. IX mede – se no círculo da Fig. XI o ângulo correspondente a parte que se deseja medir, neste caso também 40°gg^e e pela fórmula $P = \frac{\hat{a}R\pi}{5}$ tem – se: $P = \frac{40 \times 0{,}25 \times \pi}{5} = 6$ cm (para confirmar mede – se na hipérbole da Fig. IX e no circulo da Fig. XI os comprimentos das retas 1 – d, d – c, c – d_1, ... correspondentes a magnitude do ângulo de 40° gg^e).

RELAÇÃO ENTRE AS ÁREAS DAS HIPÉRBOLES E QUADRADOS

Como o raio médio da hipérbole inscrita no quadrado da Fig. V é igual ao raio do círculo inscrito no quadrado da Fig. XI, determina – se a relação entre as áreas das hipérboles e quadrados da seguinte forma: como a metade do comprimento de quaisquer dos lados de uma quadrado é sempre igual ao comprimento do raio médio da hipérbole inscrita neste quadrado Fig. IV e V respectivamente, a área de um quadrado de lados iguais ao raio médio de uma hipérbole também é dada por $l^2 = r^2$ (l=lados do quadrado de comprimentos iguais ao raio médio da hipérbole) neste caso $l = r =$ 8 cm e $8^2 = 64$ cm^2 Fig. XII.

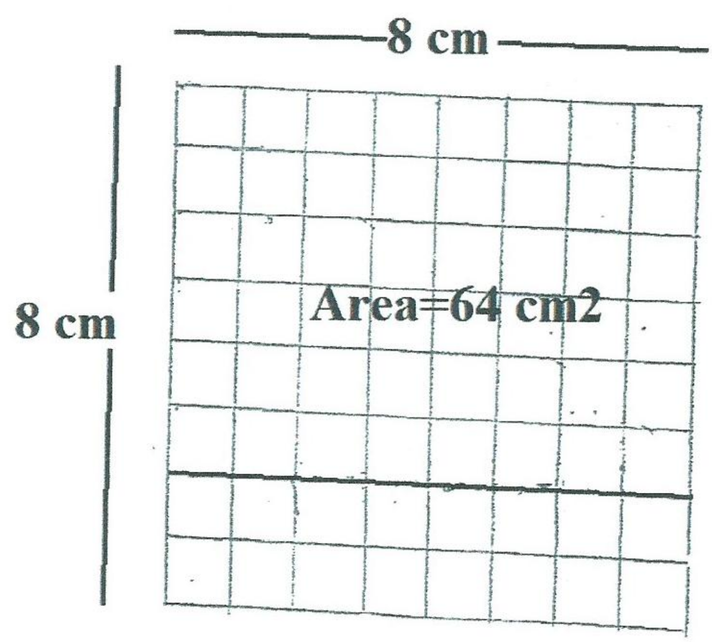


Fig. XII

Como a área de um círculo é dada pelo produto do quadrado do raio r^2 por π (produto da área de um quadrado de lados iguais ao raio do círculo por π) e sendo o raio médio da hipérbole inscrita no quadrado da Fig. V igual ao raio do círculo inscrito no quadrado da Fig. XI, a área de uma hipérbole também é igual ao produto da área de um quadrado de lados iguais ao raio médio da hipérbole por π ou $8^2 . \pi = 64.3 = 192$ cm^2 Fig. XIII.

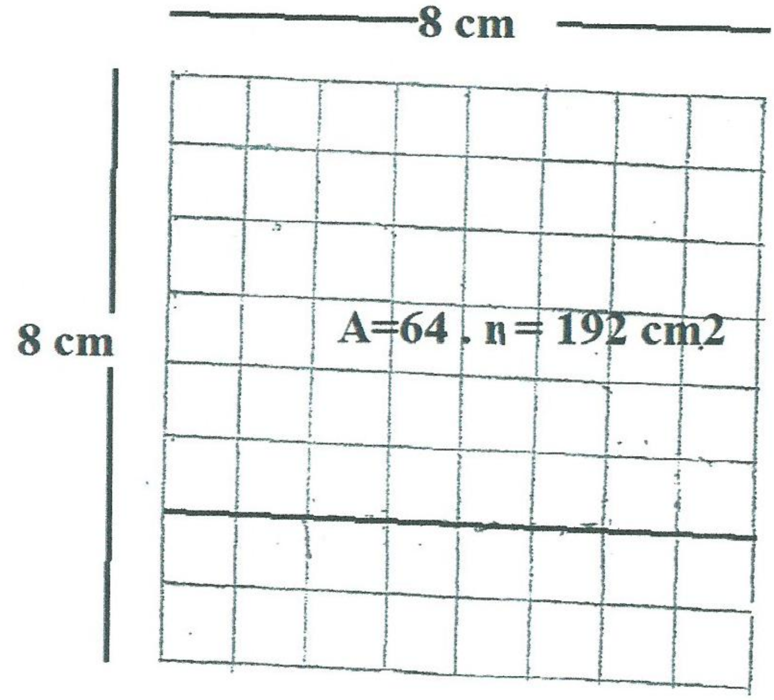


Fig. XIII

Como quaisquer dos quadrados Fig. I, II ... mede 16 cm de lados, a área desses quadrados é igual 16.16=256 cm^2. Sendo a área de quaisquer das hipérboles inscritas no quadrado igual 192 cm^2 pode – se afirmar que:

"A área de uma hipérbole inscrita em um quadrado também é sempre igual a $^3/_4$ da área desse quadrado".

Para confirmar a relação entre as áreas das hipérboles e quadrados determina – se a área de quaisquer dos quadrantes da hipérbole da Fig. V da seguinte forma: como o perímetro de quaisquer dos quadrantes da hipérbole mede 12 cm de comprimento Fig. IX, constrói – e o triângulo ABC cuja altura (h) e base (b) tenham comprimentos (8 e 12 cm) iguais ao raio médio e perímetro do quadrante da hipérbole e pela fórmula: A = $\frac{8.12}{2}$ = 48 cm^2 Fig. XIV.

Sendo a área de quaisquer dos quadrantes da hipérbole Fig. V igual a 48 cm^2 a área dessa hipérbole é igual 48.4 = 192 cm^2.

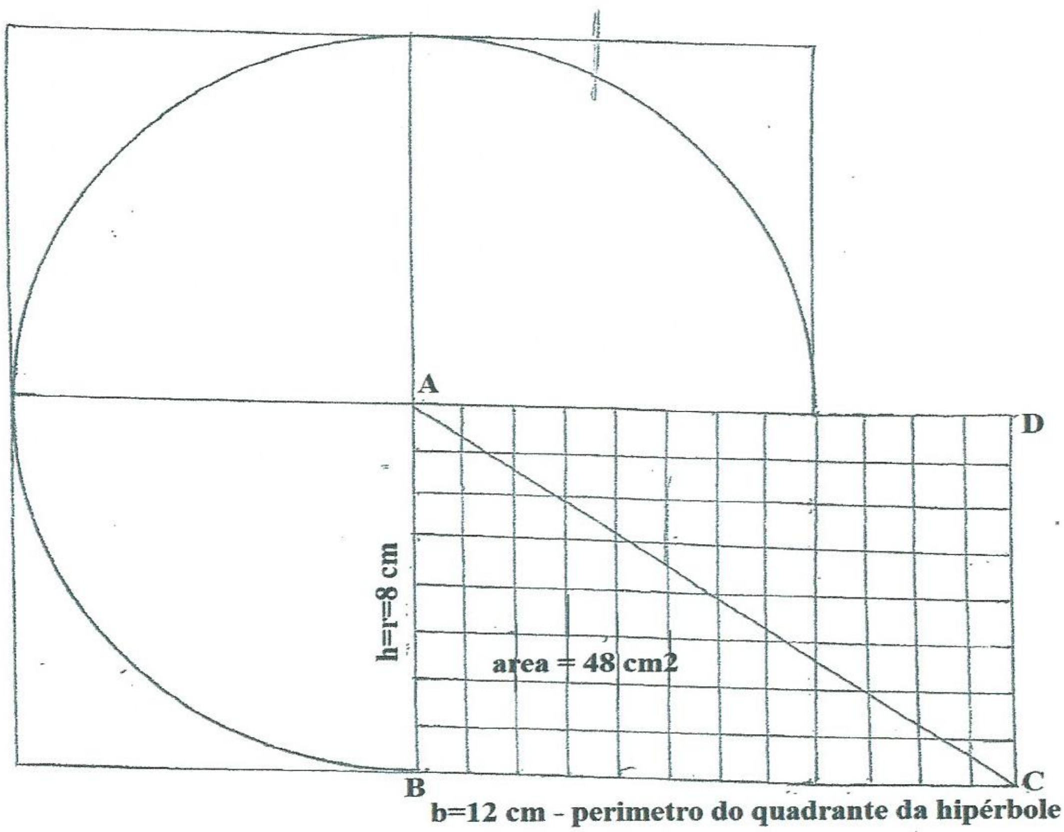


Fig. XIV

Para confirmar o comprimento do perímetro do quadrante da hipérbole mede – se os comprimentos das retas 1 – d, d – c, c – d_1,... em que foi dividido o perímetro da hipérbole Fig. IX.

"Denomina – se elipses as curvas que num mesmo plano retangular o comprimento do eixo maior é sempre igual ao dobro do comprimento do eixo menor. Quando isto não acontece tem – se as parábolas".

Quando o eixo 1 – 3 (diâmetro) de um círculo inscrito em um quadrado Fig. I se desloca para cima ou para baixo a partir da metade dos lados desse quadrado e posiciona – se sobre quaisquer dos lados dc ou ab do quadrado e o eixo 2 – 4 se desloca para direita ou esquerda também a partir da metade dos lados desse quadrado e posiciona – se sobre quaisquer dos lados da ou cb do quadrado, tem – se arcos de elipses Fig. II e III respectivamente.

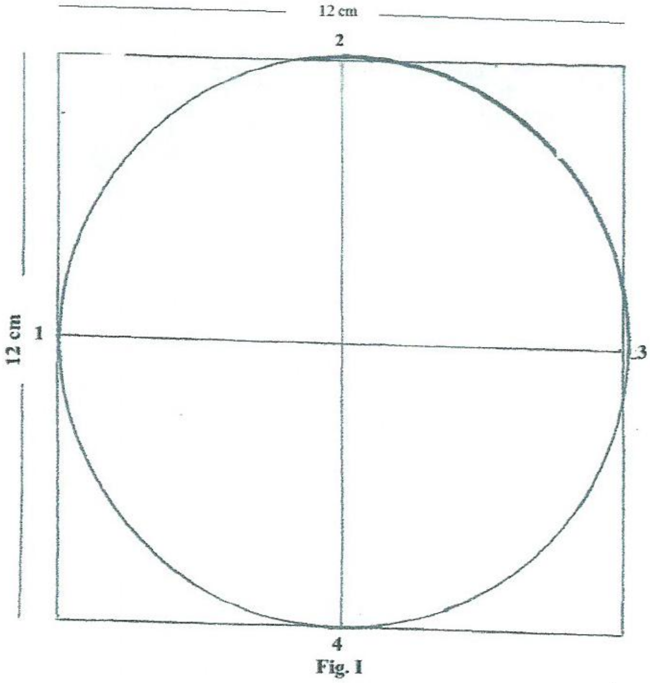


Fig. I

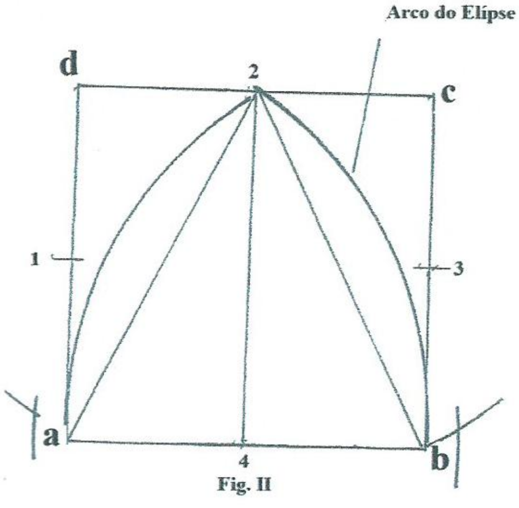


Fig. II

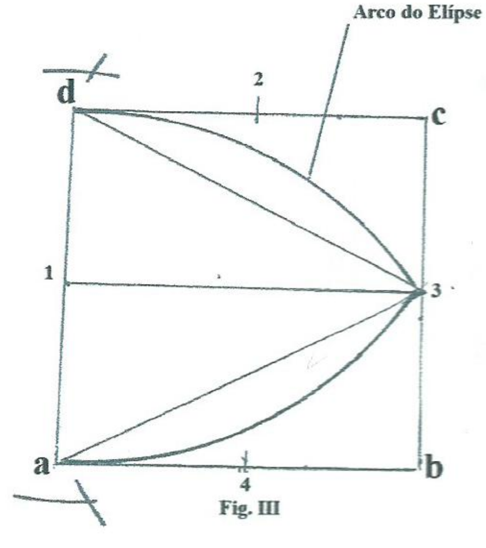


Fig. III

Já quando somente um dos eixos 1 – 3 ou 2 – 4 (diâmetros) de um círculo inscrito em um quadrado Fig. I permanece posicionado na metade dos lados desse quadrado tem – se os retângulos abc_1d_1 e d_1c_1cd e as curvas denominadas elipses Fig. IV.

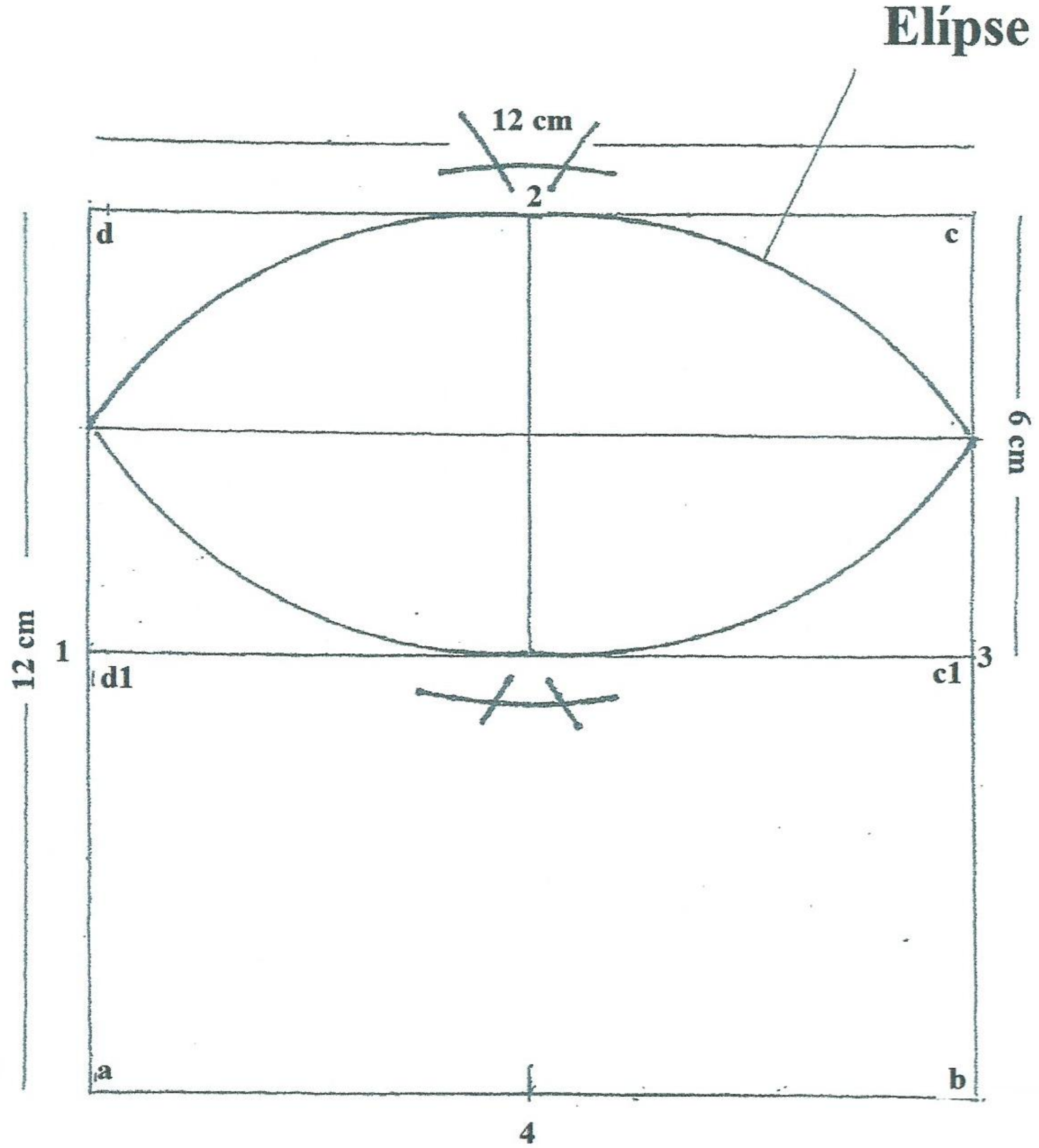


Fig. IV

CONSTRUÇÃO E RETIFICAÇÃO DE UMA ELIPSE

Para se demonstrar a relação existente entre os comprimentos dos eixos e o perímetro de uma elipse procede – se também como determina a fórmula universal de retificação que permite construir e retificar uma elipse da seguinte forma:

Constrói – se um retângulo qualquer, neste caso medindo internamente o equivalente ao tamanho de dois quadrados da Fig. I ou 12 e 24 cm de lados respectivamente, depois traça – se as linhas 1, 2, 3 e 4 que divide ao meio cada lado desse retângulo Fig. IV.

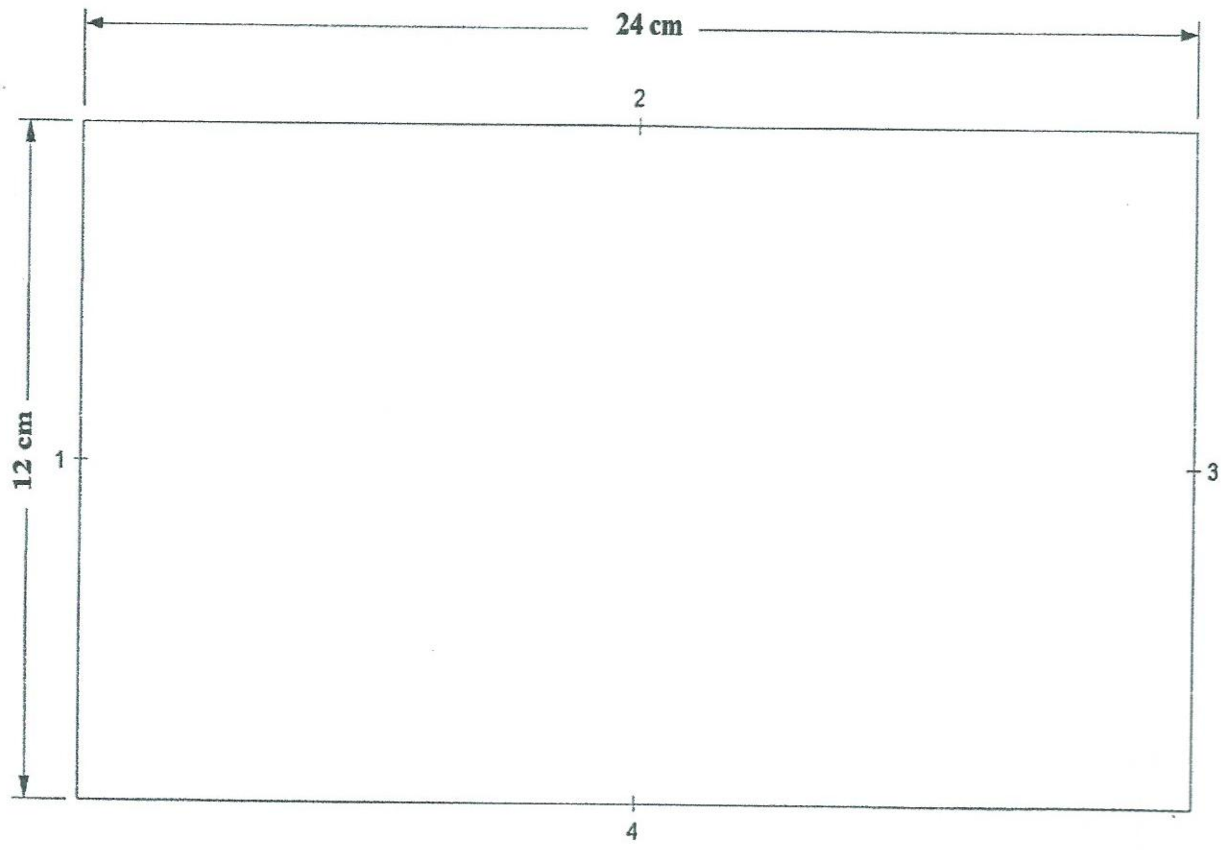


FIG V

Traça – se agora as retas 1 – 3 e 2 – 4 que divide este retângulo em quatro retângulos iguais, determinam o foco (o) e os eixos 1 – 3 e 2 – 4 da elipse a ser construída Fig. VI.

Traça – se também os lados 1 – 2, 2 – 3... do losango inscrito no retângulo da Fig. VI e com uma abertura correspondente ao comprimento de quaisquer dos lados 1 – 2... desse losango fixa – se o compasso nos vértices 1, 3, 4 e 2 do losango e traça – se as linhas que se interceptam em E, F, G e H respectivamente. Novamente com a mesma abertura fixa – se o compasso nos vértices dos ângulos formados pelas linhas que se interceptam em E e F e G e H e constrói – se a elipse inscrita no retângulo Fig. VII.

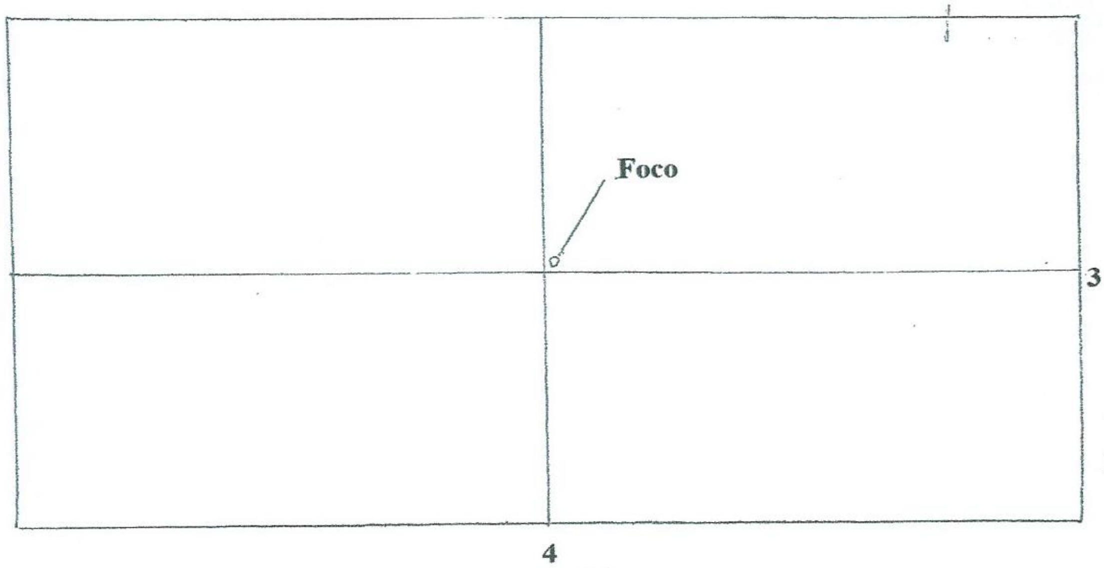


Fig. VI

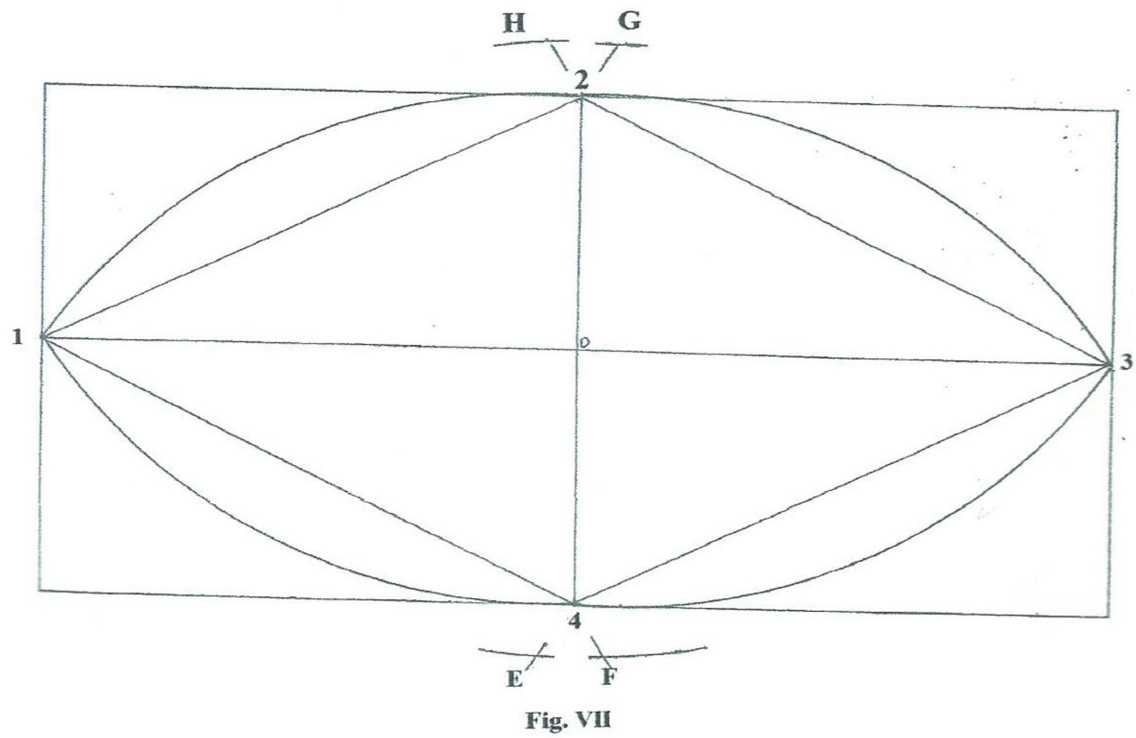


Fig. VII

RETIFICAÇÃO DE UMA ELIPSE

Ainda com a mesma abertura (correspondente ao comprimento do lado do losango) fixa – se o compasso nos vértices 1, 2, 3 e 4 do losango e traça – se as linhas que interceptam em 5, 6, 7 e 8 respectivamente. Em seguida, e a partir dos vértices dos ângulos formados pelas linhas que se interceptam em 5 – E, 6 – F, 7 – H e 8 – G traça – se as linhas r, r_1, r_2 e r_3 que divide esta elipse em oito partes iguais e traça – se ainda os lados 1 – a, a – 2, ...do octógono inscrito na elipse Fig. VIII.

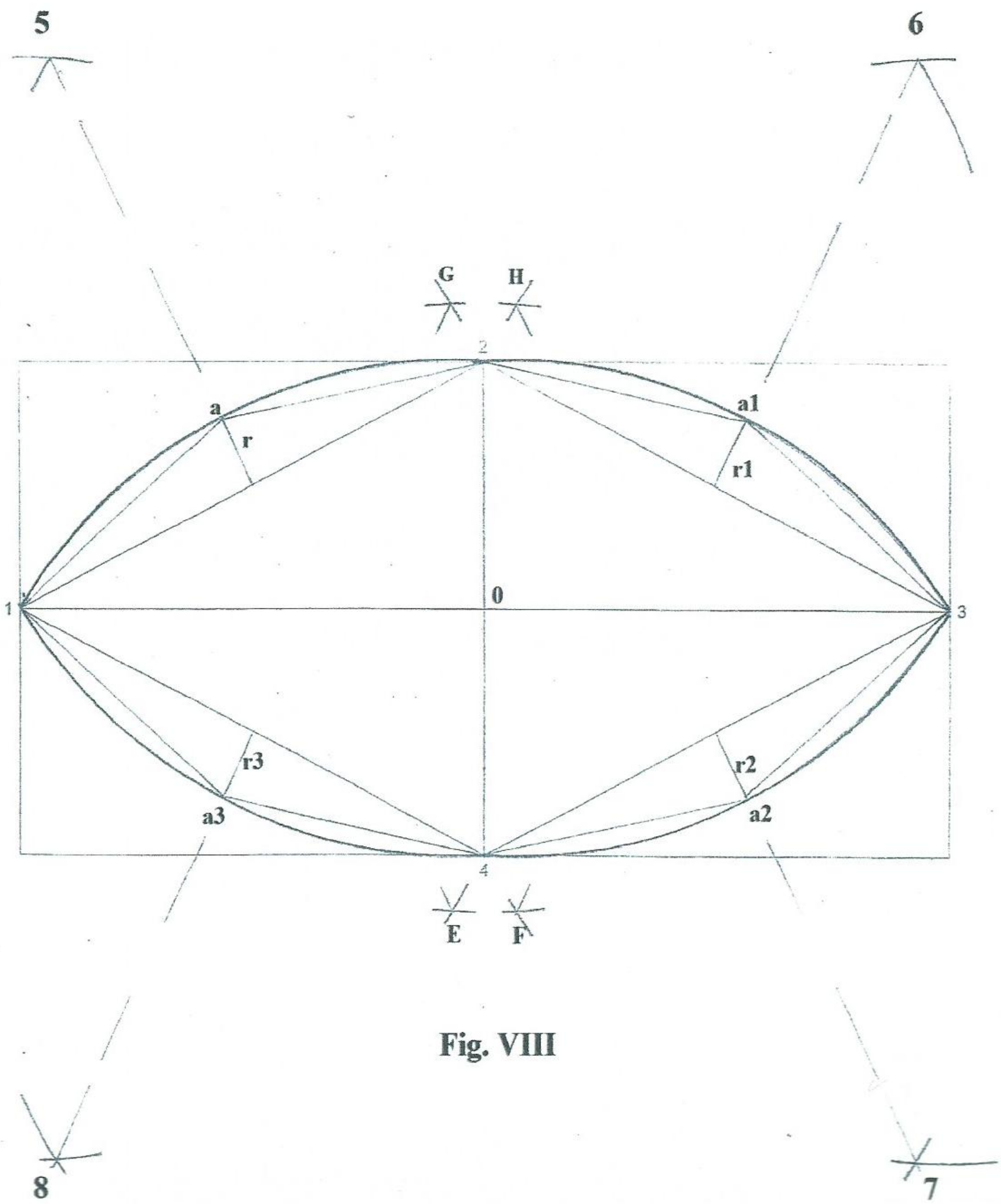


Fig. VIII

Agora com uma abertura correspondente ao comprimento de quaisquer dos lados 1–a, a – 2,do octógono inscrito na elipse da Fig. VIII fixa – se o compasso nos vértices 1 e a, a e 2... desse octógono e traça – se as linhas que se interceptam em 9, 10, 11, 12... Em seguida, e a partir dos vértices dos ângulos formados pelas linhas que se interceptam em 9 – E, 10 – E, 11 – F, 12 – F, 13 – H... traça – se as linhas r_4, r_5, r_6, r_7... que divide esta elipse em dezesseis partes iguais e traça – se ainda os lados 1 - b, b – a, a – b... do hexadecágono inscrito na elipse Fig.IX.

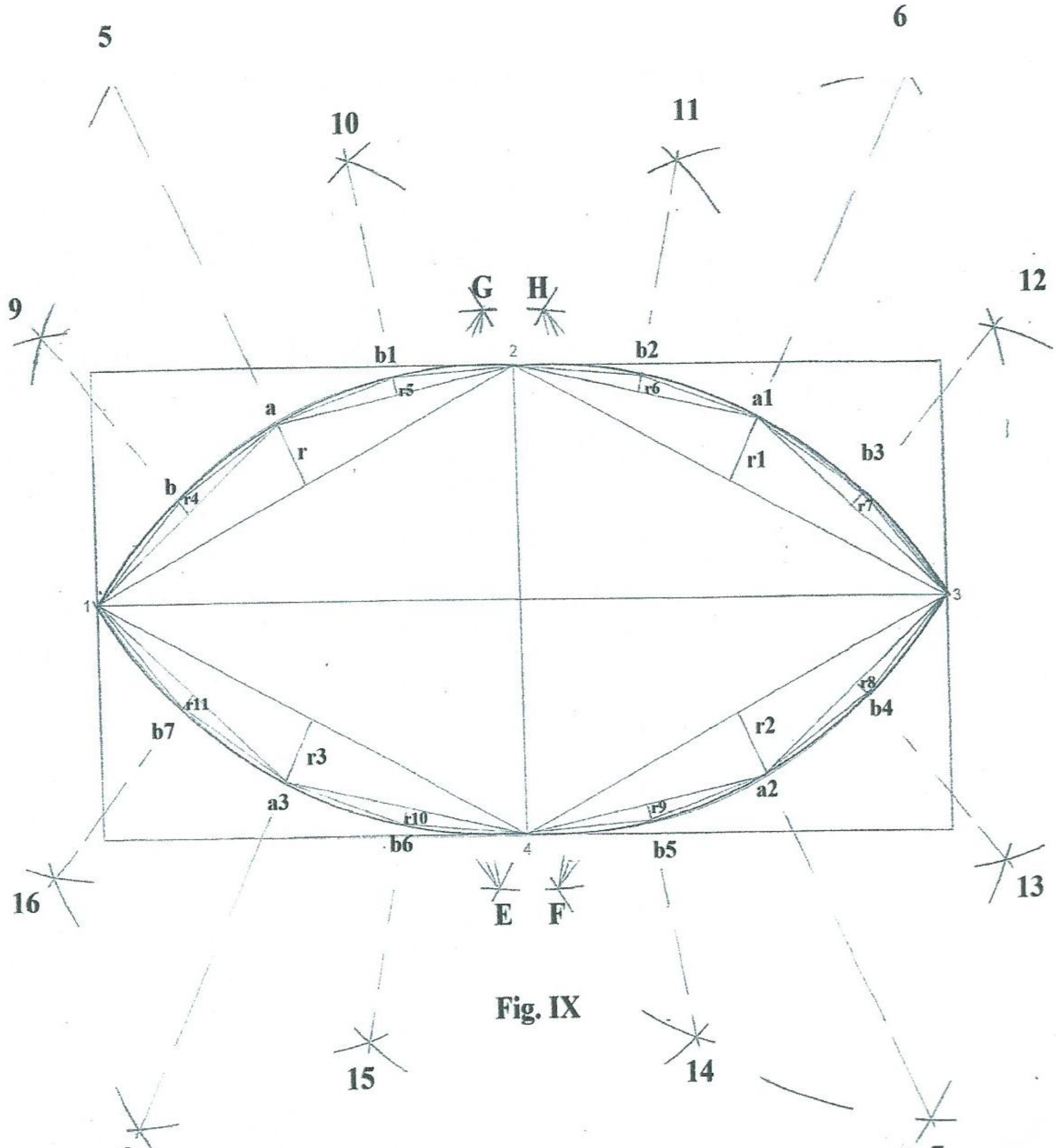


Fig. IX

Novamente com uma abertura correspondente ao comprimento de quaisquer dos lados 1 – b, b – a, a – b,... do hexadecágono inscrito na elipse da fig. IX fixa – se o compasso nos vértices 1 e b, b e a, a – b_1,... desse hexadecágono e traça – se as linhas que se interceptam em 17, 18, 19, 20 ... Em seguida, e a partir dos vértices dos ângulos formados pelas linhas que se interceptam em 17 – E, 18 – E,... 21 – F, 22 – F... traça – se as linhas r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{15}... que divide esta elipse em trinta e duas partes iguais e traça – se ainda os 32 lados 1 – c, c – b, b – c_1... do polígono inscrito também na elipse Fig. X.

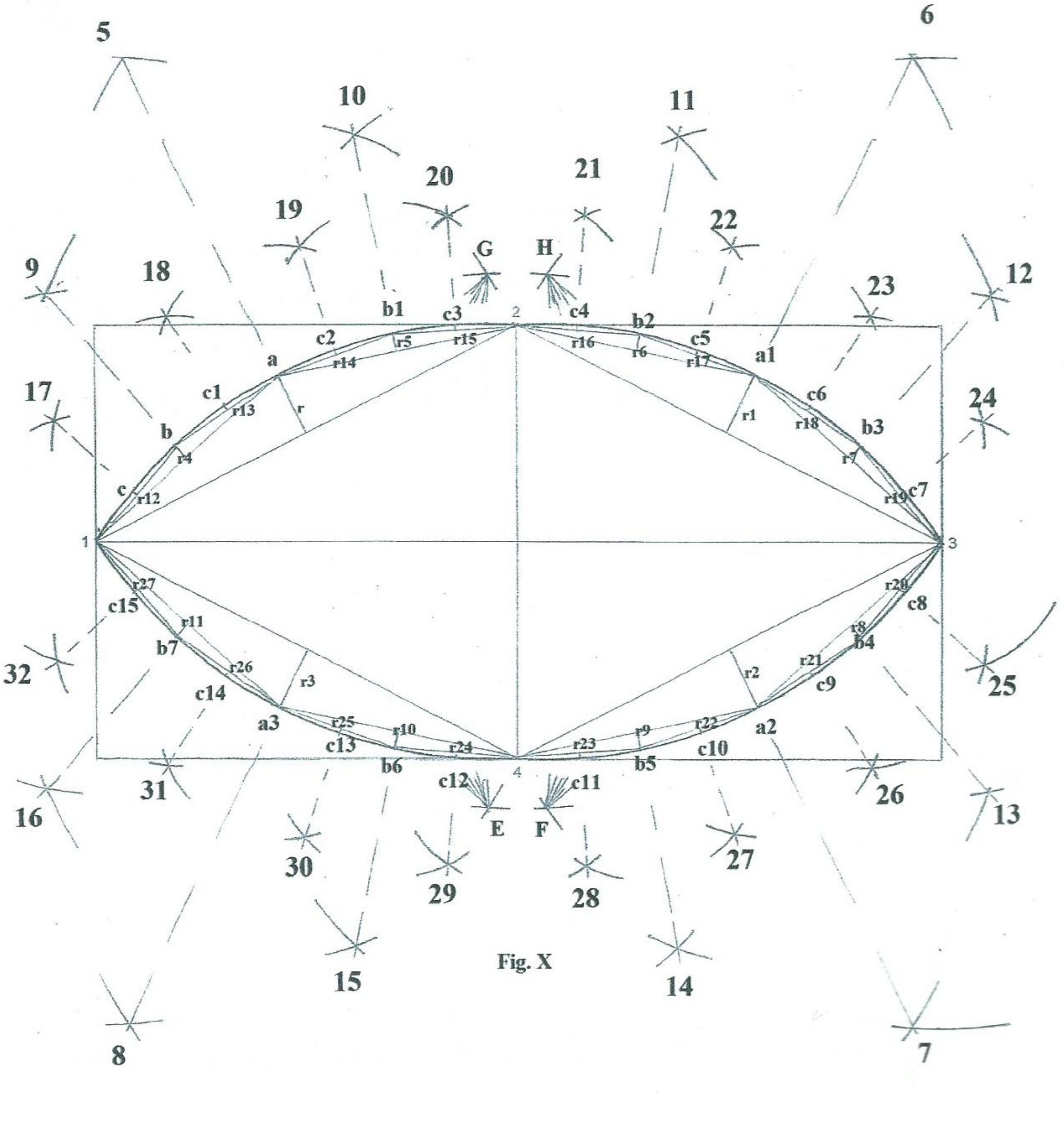


Fig. X

Finalmente com uma abertura correspondente ao comprimento de quaisquer dos 32 lados 1 – c, c – b, b – c_1... do polígono inscrito na elipse da fig. X fixa – se o compasso nos vértices 1 e c, c e b, b e c_1... desse polígono e traça – se as linhas que se interceptam 33, 34, 35, 36, ... Em seguida, e a partir dos vértices dos ângulos formados pelas linhas que se interceptam em 33 – E, 34 – E... 41 – F, 42 – F... traça – se as linhas r_{28}, r_{29}, r_{30}, r_{31}... dividindo agora esta elipse em 64 retas iguais Fig. XI.

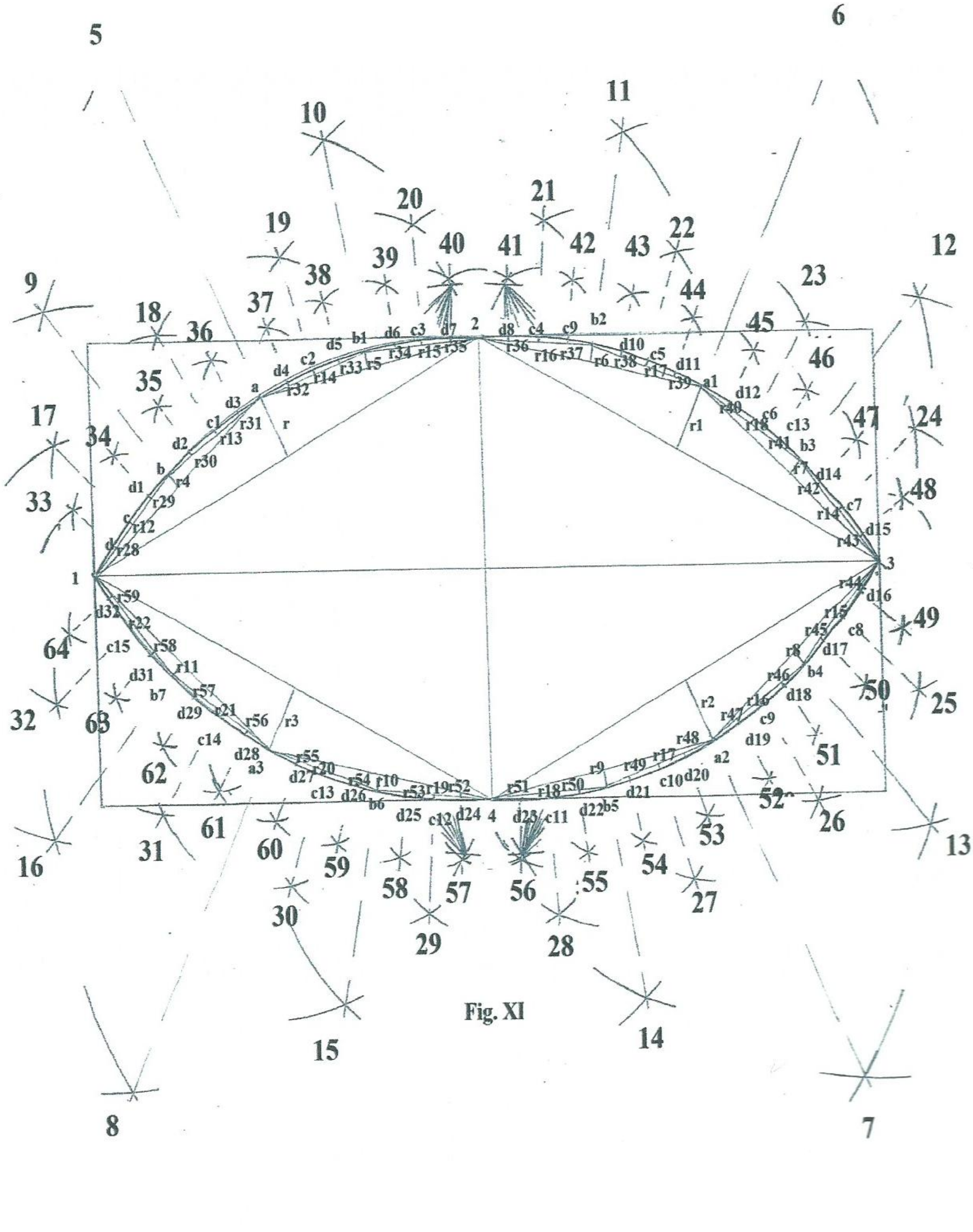


Fig. XI

"Ao dividir o perímetro (Pe) de uma elipse em 64 retas iguais o comprimento de quaisquer dessas retas é sempre igual a 64ª parte de três vezes a média dos comprimentos dos eixos da elipse aqui denominado diâmetro médio (dm) ou $\frac{\text{Pe}}{64} = \frac{3dm}{64}$.

Como neste caso os comprimentos dos eixos da elipse são iguais a 12 e 24 cm, seu diâmetro médio $dm = \frac{12+24}{2} = 18$ cm. Sendo o diâmetro médio da elipse da fig. VII igual a 18 cm pela fórmula $\frac{3dm}{64}$ acha – se o comprimento de quaisquer das 64 retas em que foi dividido o perímetro da elipse ou $\frac{3\text{x}18}{64} = 0,84375$ cm (para confirmar mede – se os comprimentos dos eixos da elipse e também o comprimento de quaisquer das 64 retas 1 – d, d – c, c – d_1... em que foi dividido o perímetro da elipse fig. XI)

"Como o comprimento do perímetro de uma elipse é dado pelo produto da média dos comprimentos dos seus eixos por π ou Pe=dmπ. O comprimento da circunferência de um círculo de diâmetro igual a média dos comprimentos dos eixos de uma elipse é sempre igual ao comprimento do perímetro dessa elipse ou c=dmπ=Pe".

RELAÇÃO ENTRE OS COMPRIMENTOS DOS EIXOS E O PERÍMETRO DE UMA ELIPSE

Para confirmar a relação existente entre os comprimentos dos eixos e o perímetro de uma elipse divide – se cada uma das 64 retas 1 – d, d – c, c – d_1,... em que foi dividido o perímetro da elipse da fig. XI em cinco partes iguais, correspondendo também cada uma, a um ângulo de magnitude igual a um grau geométrico fig. XII. Em seguida pelas fórmulas $R = \frac{\text{dm}}{64}$ e $Pe = \frac{\hat{a}R\pi}{5}$ acha – se o comprimento de quaisquer dos 320 (64 x 5=320) partes em que foi dividido o perímetro da elipse ou $R = \frac{18}{64} = 0{,}28125\text{cm}$ e $Pe = \frac{1\ \text{x}0{,}28125\text{x}3}{5} = 0{,}16875$ cm, sendo:

R= 64ª parte da média dos comprimentos dos eixos da elipse da fig. XII.

dm= Diâmetro médio (média dos comprimentos dos eixos da elipse da fig. XII).

Pe= Comprimento de quaisquer das 320 partes em que foi dividido o perímetro da elipse da fig. XII.

â= Ângulo correspondente à 320ª parte da elipse da fig. XII medido em um círculo de diâmetro (dm) igual a média dos comprimentos dos eixos da elipse fig. XIII.

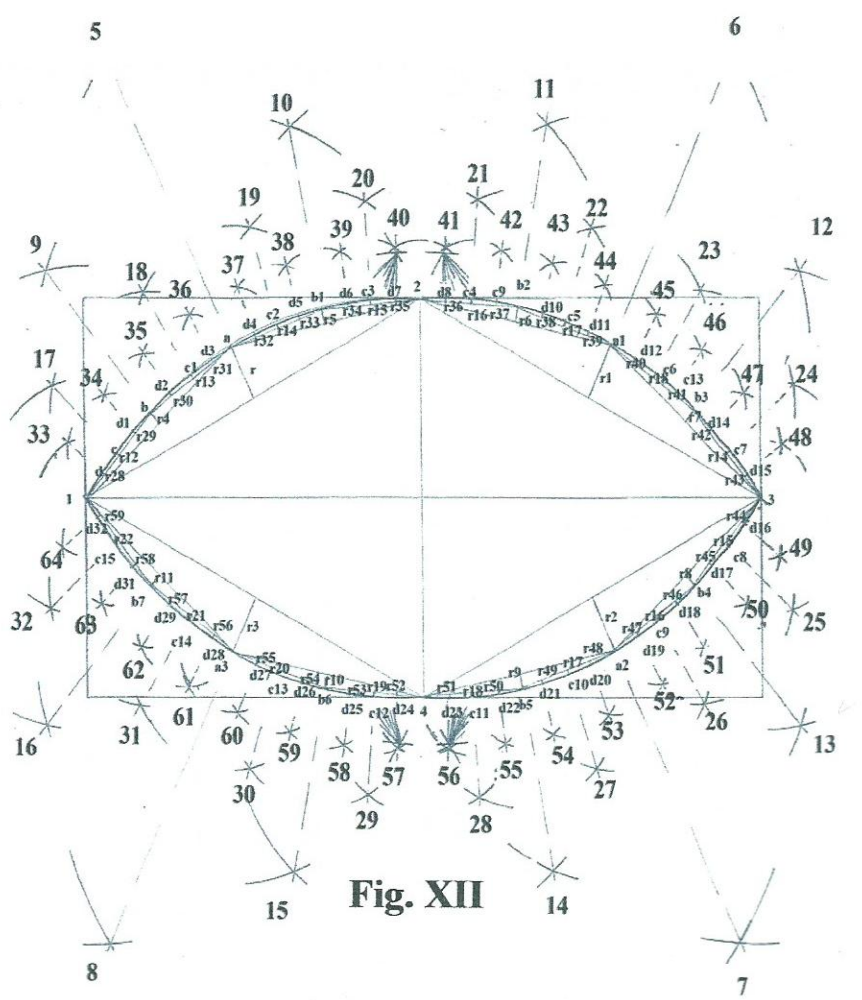


Fig. XII

"Como o comprimento de quaisquer das 320 partes em que foi dividido o perímetro da elipse da fig. XII é igual a 0, 16875 cm. O comprimento do perímetro dessa elipse é igual a 320 x 0, 16375=54 cm (para confirmar mede – se o comprimento de quaisquer das 320 partes em que foi dividido o perímetro da elipse da fig. XII).

Como o perímetro de uma elipse é sempre igual ao perímetro de um círculo de diâmetro igual a média dos comprimentos dos eixos dessa elipse, para achar o comprimento do perímetro (Pe) de uma elipse ou o comprimento de partes do perímetro de uma elipse constrói – se um círculo de diâmetro (dm) igual a média dos comprimentos dos eixos da elipse e pela fórmula $Pe = \frac{\hat{a}R\pi}{5}$ acha –se o comprimento do perímetro de uma elipse ou o comprimento de pares do perímetro de uma elipse, sendo:

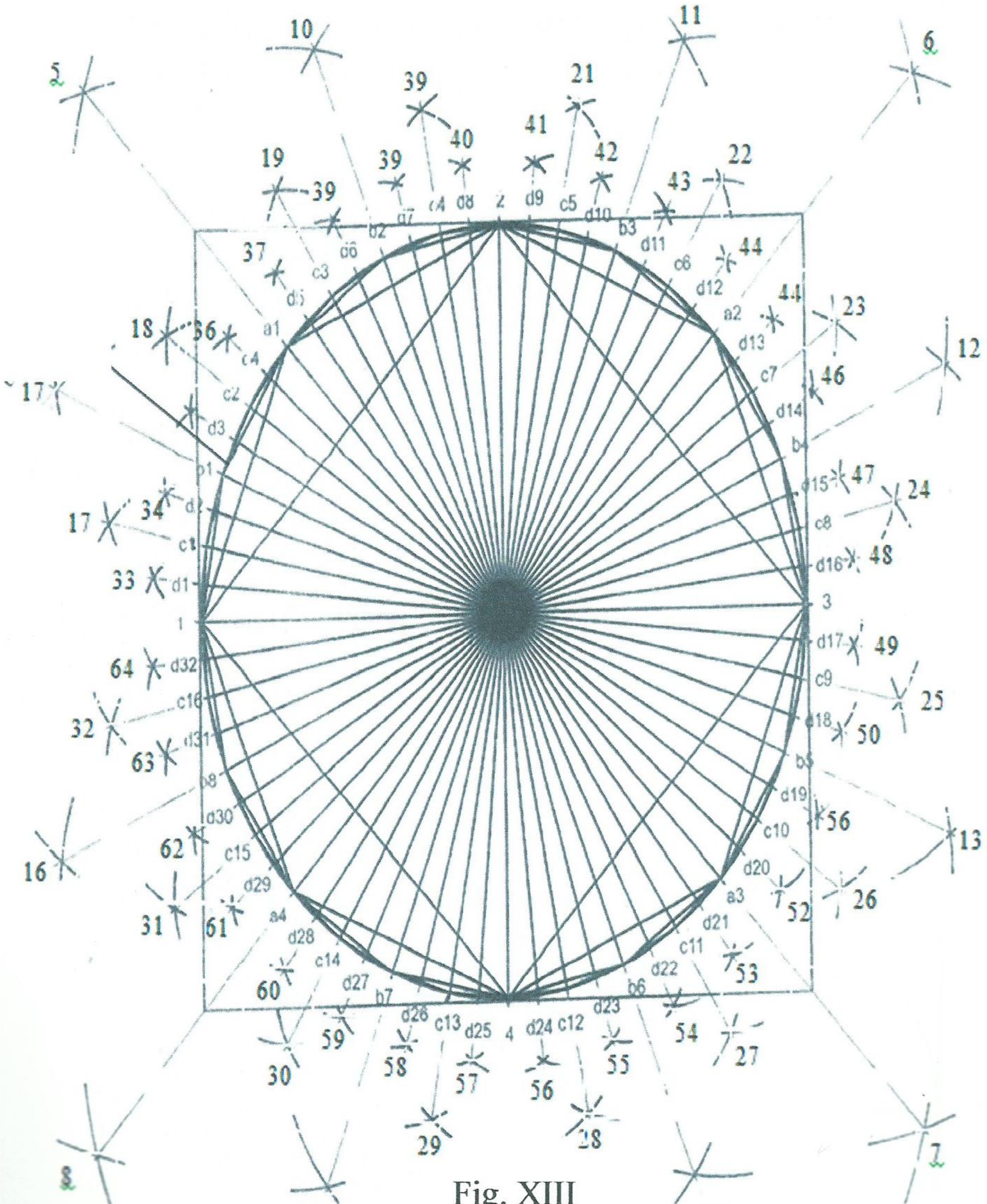
Pe= comprimento do perímetro de uma elipse ou de partes do perímetro de uma elipse.

â= ângulo correspondente ao perímetro de uma elipse ou a qualquer parte do perímetro de uma elipse medido em um círculo de diâmetro igual a média dos comprimentos dos eixos da elipse.

$R = \frac{\mathrm{dm}}{64}$ (dm = média dos comprimentos dos eixos da elipse)

$\pi = 3$

Exemplo: Para achar o comprimento de qualquer parte do perímetro da elipse da fig. XI mede – se no círculo da fig. XIII o ângulo correspondente a parte que se deseja medir, neste caso 40°gg^{e} e pela fórmula $Pe = \frac{\hat{a}R\pi}{5}$ tem – se: $Pe = \frac{40 \times 0{,}28125 \times 3}{5} = 6{,}75$ cm (para confirmar mede – se na elipse da fig. XI e no circulo da fig. XIII os comprimentos das retas 1 – d, d – c, c – d_1, ... e 1 – d_1, d_1 – c_1, c_1 – d_2... correspondentes a magnitude do ângulo de 40° gg^{e}).



5
10
39
40
41
21
42
11
6
19
39
39
22
43
44
44
23
12
18
36
37
17
46
47
24
17
34
48
33
1
2
3
4
49
64
25
32
50
63
56
13
16
62
26
52
31
61
53
60
54
59
27
58
57
56
55
30
28
29
8
7
15
14
a1
a2
a3
a4
b1
b2
b3
b4
b5
b6
b7
b8
c1
c2
c3
c4
c5
c6
c7
c8
c9
c10
c11
c12
c13
c14
c15
c16
d1
d2
d3
d6
d7
d8
d9
d10
d11
d12
d13
d14
d15
d16
d17
d18
d19
d20
d21
d22
d23
d24
d25
d26
d27
d28
d29
d30
d31
d32

Fig. XIII

RELAÇÃO ENTRE AS ÁREAS DAS ELIPSES E RETÂNGULOS

Como a área de um retângulo de lados iguais aos comprimentos dos eixos da elipse da fig. VII é igual a $^8/_9$ da área de um quadrado de lados iguais a média dos comprimentos dos eixos dessa elipse fig. XIV e XV respectivamente. A área de uma elipse inscrita em um retângulo também é igual a $^8/_9$ da área de um círculo inscrito em um quadrado de lados iguais a média dos comprimentos dos eixos dessa elipse fig. XVI e XVII respectivamente.

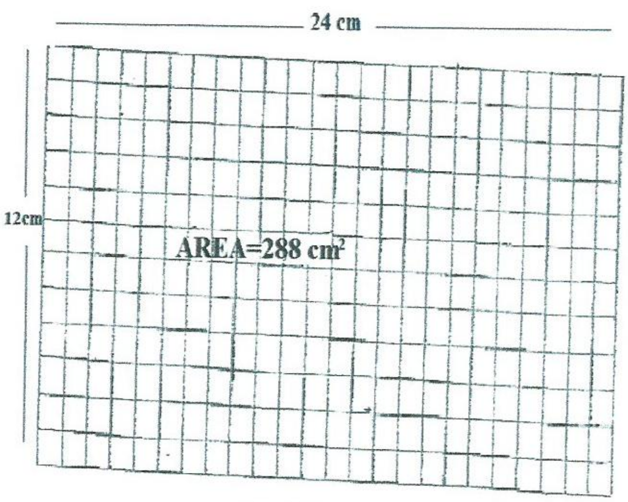


Fig. XIV

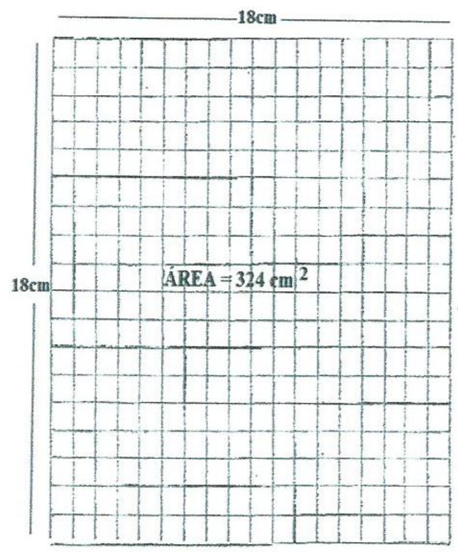


Fig. xv

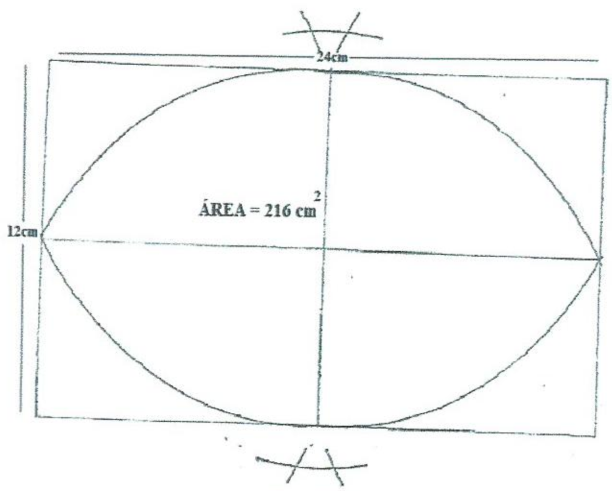


Fig. XVI

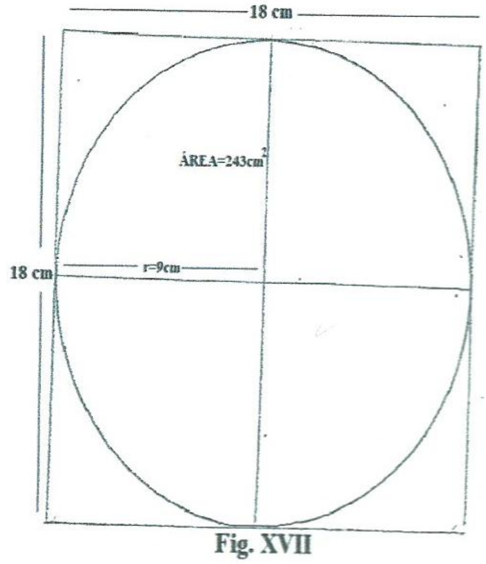


Fig. XVII

Como a área de um círculo fig. XVII é dada pelo produto do quadrado do raio por π ou $r^2.\ \pi$, neste caso temos: $9^2.3= 243\ cm^2$.

Sendo a área do círculo da fig. XVII igual ao produto da área de um quadrado de lados iguais ao raio do círculo por π ou $243cm^2$, a área da elipse da fig. XVI também é igual ao produto da área de quaisquer dos quatro retângulos em que foi dividido o retângulo da fig. VI por π ou$72.\ \pi$ = $72.3=216\ cm^2$, fig.XVIII área correspondente a $^8/_9$ da área do círculo inscrito no quadrado de lados iguais a média dos comprimentos dos eixos da elipse ver fig. XVII.

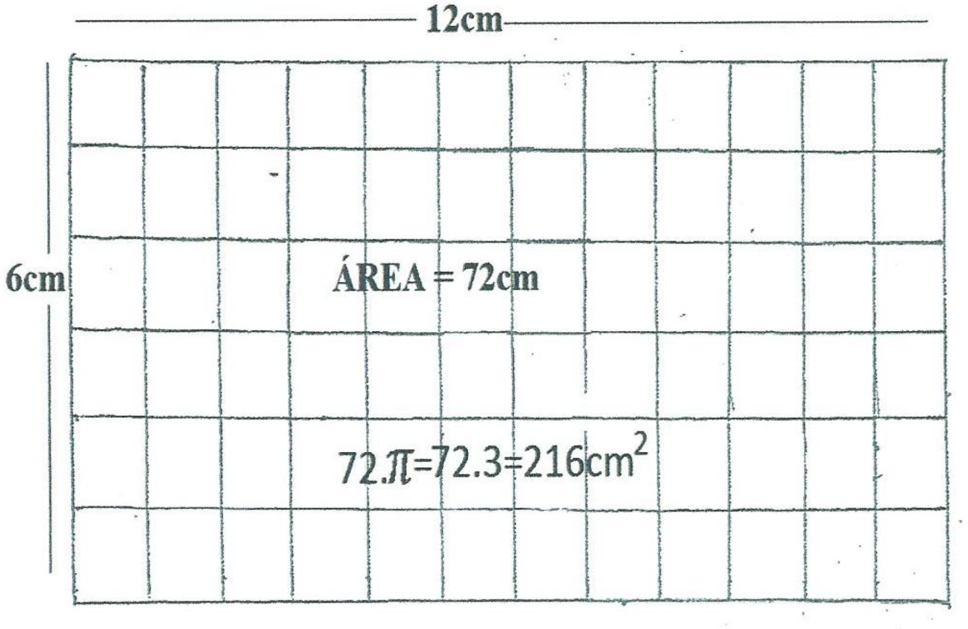


Fig. XVIII

Para confirmar a relação entre as áreas das elipses e retângulos, determina – se agora a área de quaisquer do quadrante de um círculo da seguinte forma: como o perímetro de quaisquer dos quadrantes do círculo da fig. XVI mede 13,5 cm de comprimento, constrói – se o triângulo ABC cuja altura (h) e base (b) tenham comprimentos (9 e 13,5 cm) iguais ao raio e perímetro do quadrante desse círculo e pela fórmula $A = \frac{h.b}{2}$ acha – se a área do triângulo ABC que corresponde a área do quadrante do círculo ou $A = \frac{9.13,5}{2} = 60,75\ cm^2$ fig. XIX.

Como a área de uma elipse inscrita em um retângulo é sempre igual a $^8/_9$ da área de um círculo inscrito em um quadrado de lados iguais a média dos comprimentos dos eixos da elipse, a área do quadrante de uma elipse também é igual a $^8/_9$ da área do quadrante desse círculo ou $^8/_9$ de $60,75\ cm^2 = 54 cm^2$.

Para confirmar a exatidão da área do quadrante da elipse constrói – se o triângulo $A_1B_1C_1$ cuja altura (h) tenha comprimento igual a $^8/_9$ do comprimento do raio do círculo da fig. XVII ou 8 cm, e base (b) igual ao comprimento do perímetro do quadrante da elipse da fig. XVI ou 13,5 cm e pela fórmula $A = \frac{h.b}{2}$ tem – se $A = \frac{8.13,5}{2} = 54\ cm^2$ fig. XX. Sendo a área do quadrante da elipse da fig. XVI igual a $54\ cm^2$ a área dessa elipse é igual $54.4 = 216\ cm^2$.

(Para confirmar o comprimento do perímetro do quadrante da elipse da fig. XVI mede – se os comprimentos das retas 1 – d, d – c, c – d_1... correspondentes ao comprimento de quaisquer dos quadrantes da elipse fig. XI.)

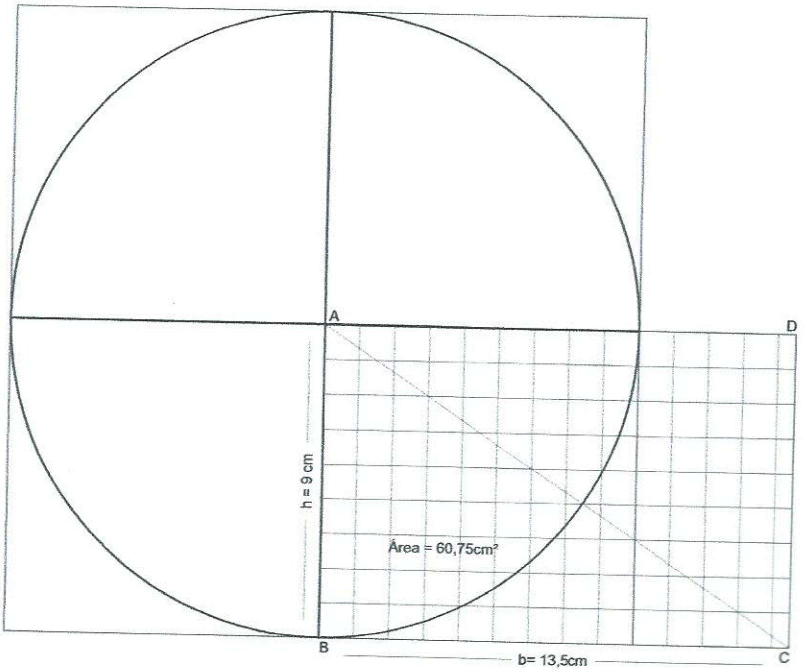


FIG XIX

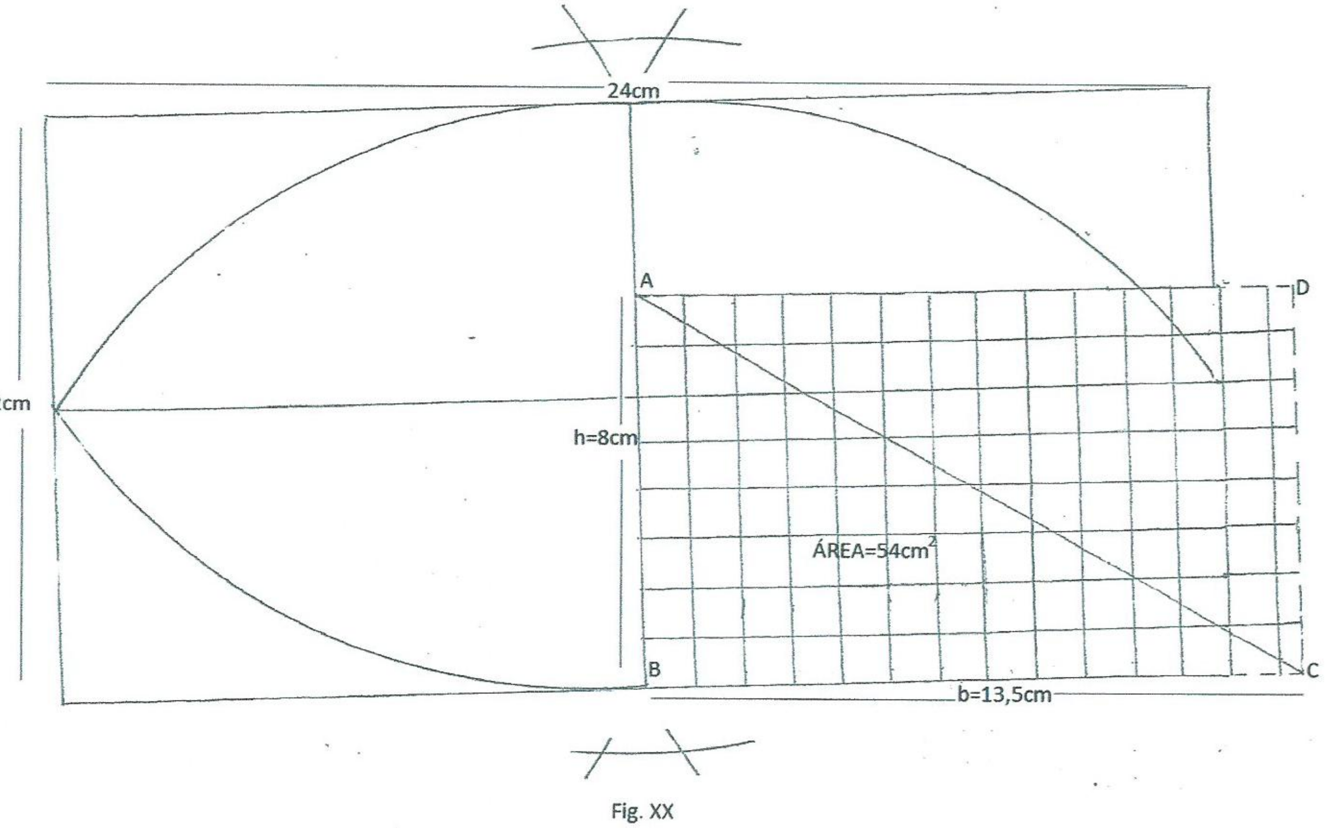


Fig. XX

“Denomina – se parábolas as curvas que num mesmo plano retangular são mais fechadas (redondas) que as elipses e os comprimentos dos seus eixos são sempre desproporcionais entre si”.

Quando o eixo maior 1 – 3 de uma elipse inscrita em um retângulo abcd Fig. I se desloca para cima ou para baixo a partir da metade dos lados desse retângulo e posiciona – se num ponto qualquer xy dos lados do retângulo tem – se um arco de parábola Fig. II.

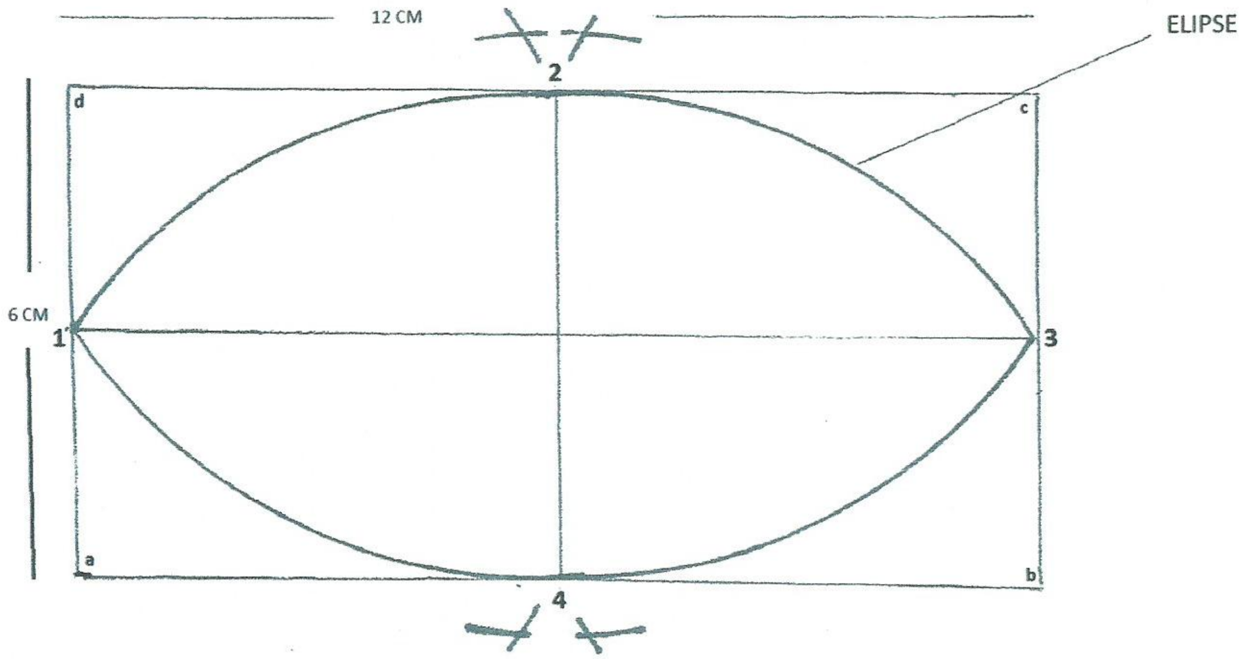


Fig.I

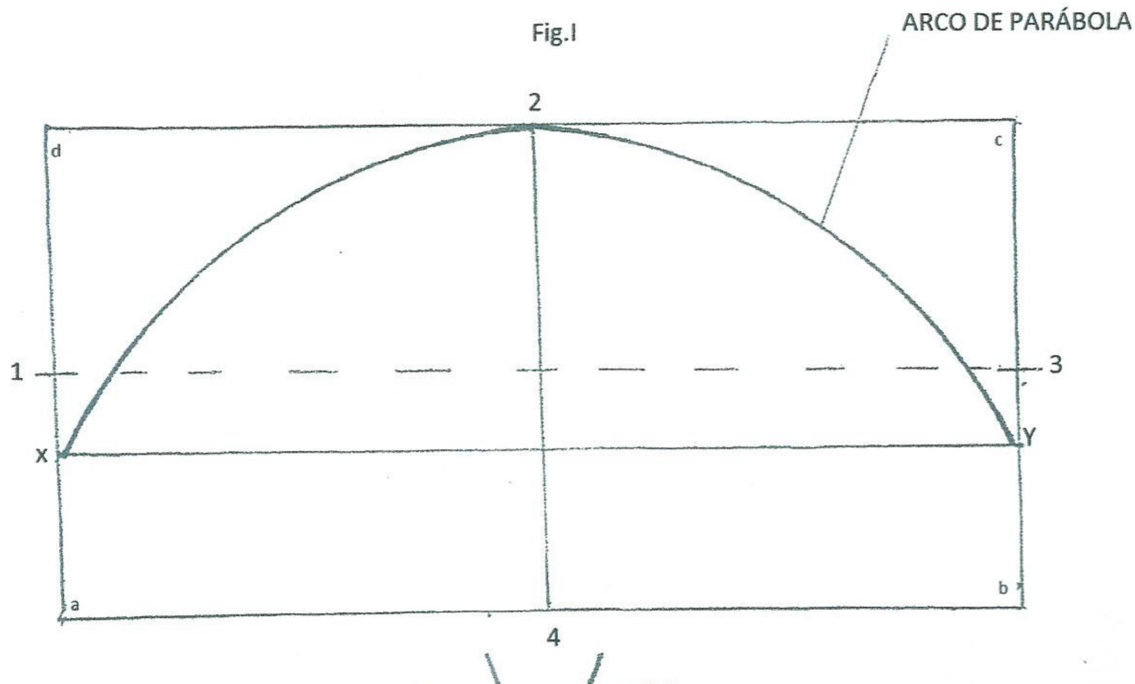


Fig.II

Porém se o eixo 1 – 3 da elipse continuar se deslocando para baixo ou para cima e posicionar sobre quaisquer dos lados (ab) do retângulo tem – se arcos de círculo e hipérbole Figs. III e IV respectivamente.

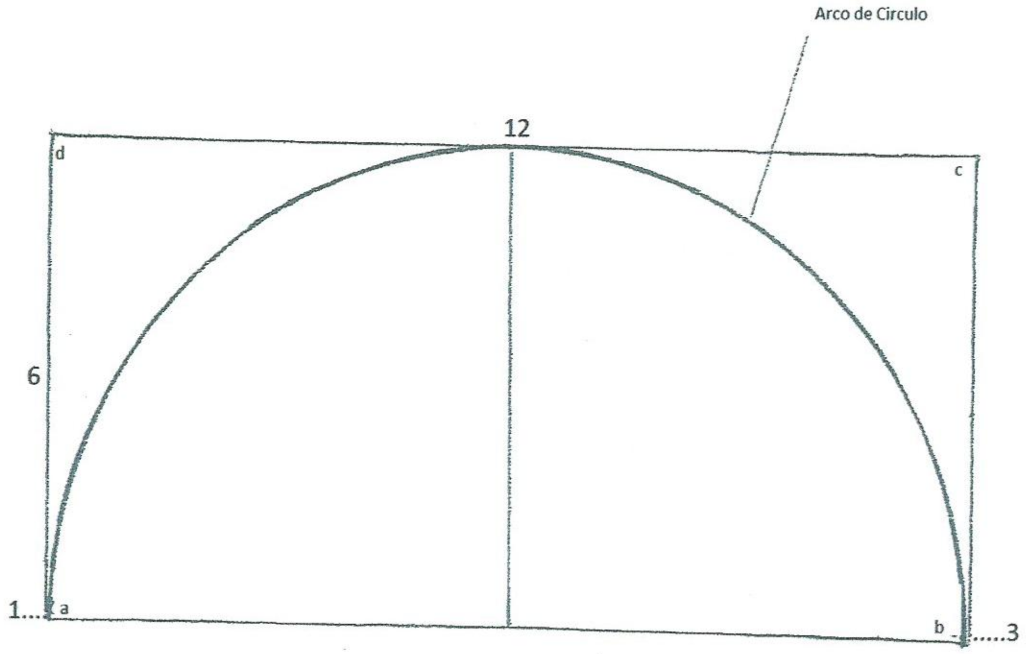


Fig. III

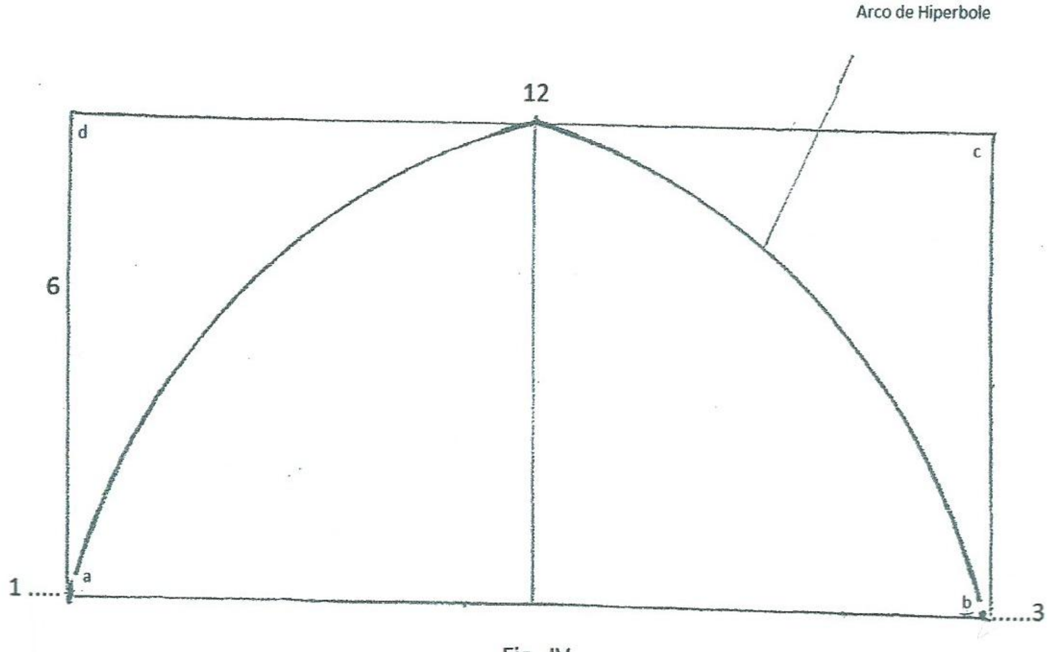


Fig. IV

Também quando o eixo menor 2 – 4 da elipse inscrita no retângulo da fig. I permanece posicionado na metade dos lados desse retângulo tem – se os quadrados ab_2c_2d e b_2bcc_2 e o círculo de diâmetros iguais ao comprimento de quaisquer dos lados desses quadrados Fig. V. Assim, quando o diâmetro 5 – 6 de um círculo inscrito em um quadrado permanece posicionado na metade dos lados desse quadrado tem – se os retângulos $ab_2c_3d_1$ e $d_1c_3c_2d$ e as elipses de eixos pq e rs Fig. VI. Desta forma, quando o eixo maior (pq) de quaisquer das elipses se desloca para baixo x_1y_1 ou para cima a partir da metade dos lados desses retângulos tem – se novamente arcos de parábolas. Fig. VII.

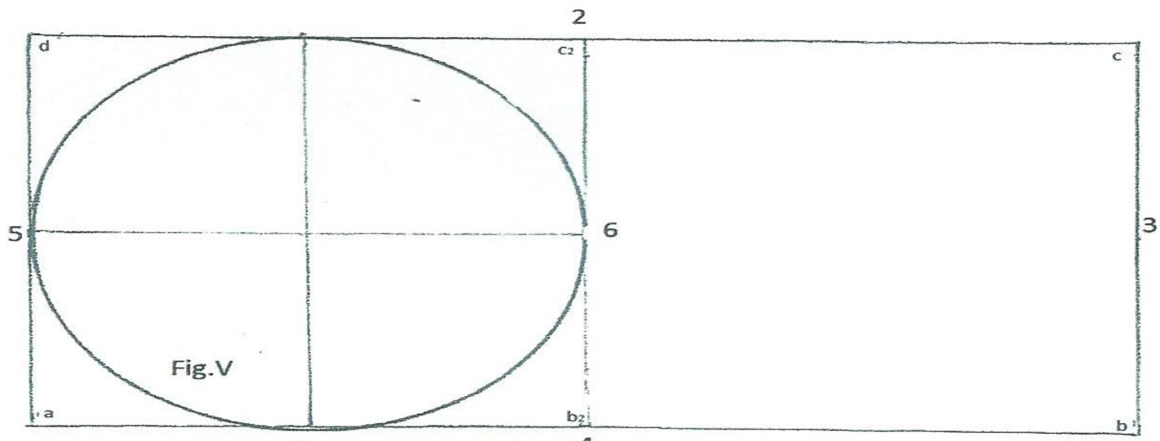


Fig.V

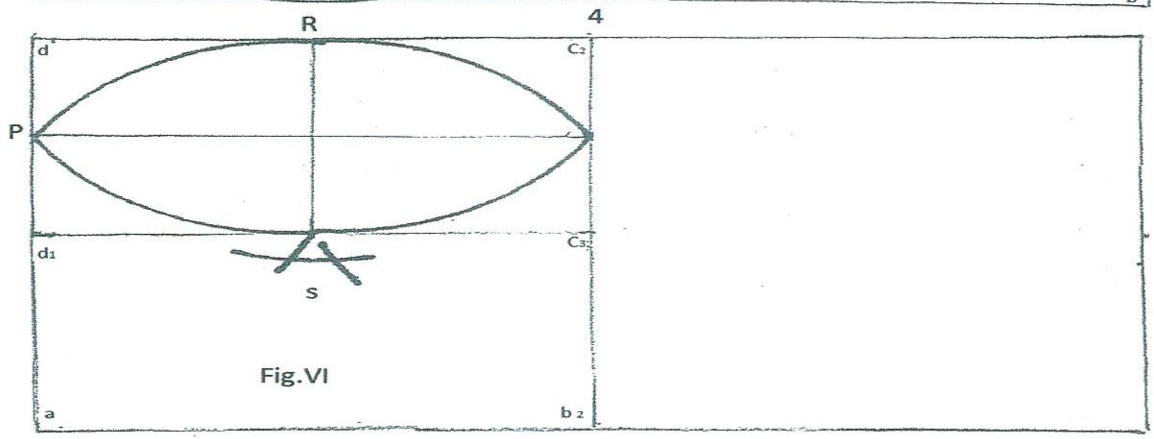


Fig.VI

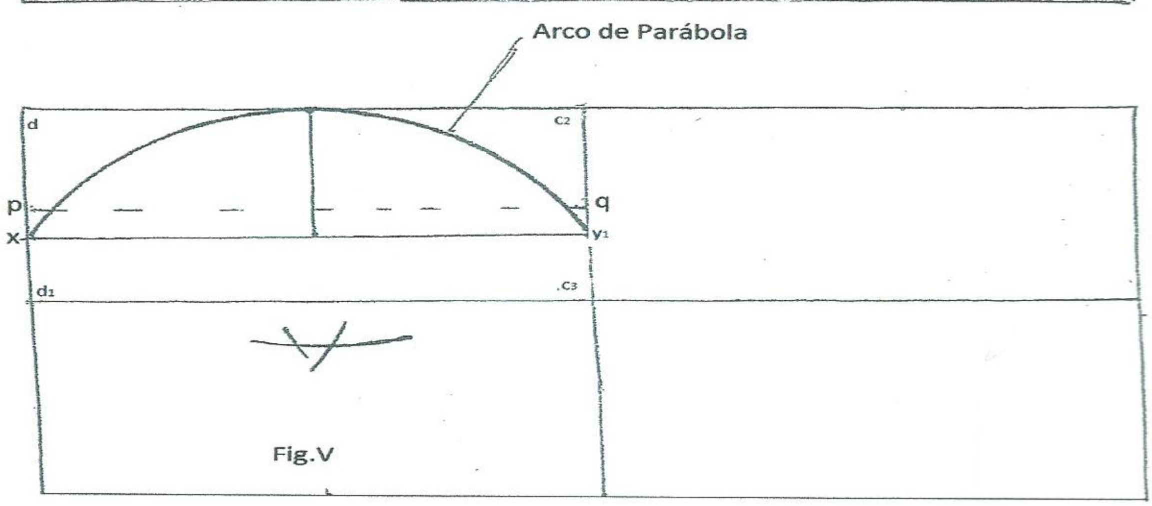


Fig.V

CONSTRUÇÃO E RETIFICAÇÃO DE UMA PARÁBOLA

Quando o eixo maior 1 – 3 da elipse inscrita no retângulo abcd Fig. I se desloca para baixo e posiciona – se num ponto qualquer xy dos lados desse retângulo tem – se um arco de parábola e um novo plano retangular a_1b_1cd Fig. VIII. Assim, para construir uma parábola, constrói – se o retângulo a_1b_1cd que mede internamente 15 e 24 cm de lados, depois traça – se as linhas 1, 2, 3 e 4 que divide ao meio cada lado desse retângulo Fig. IX.

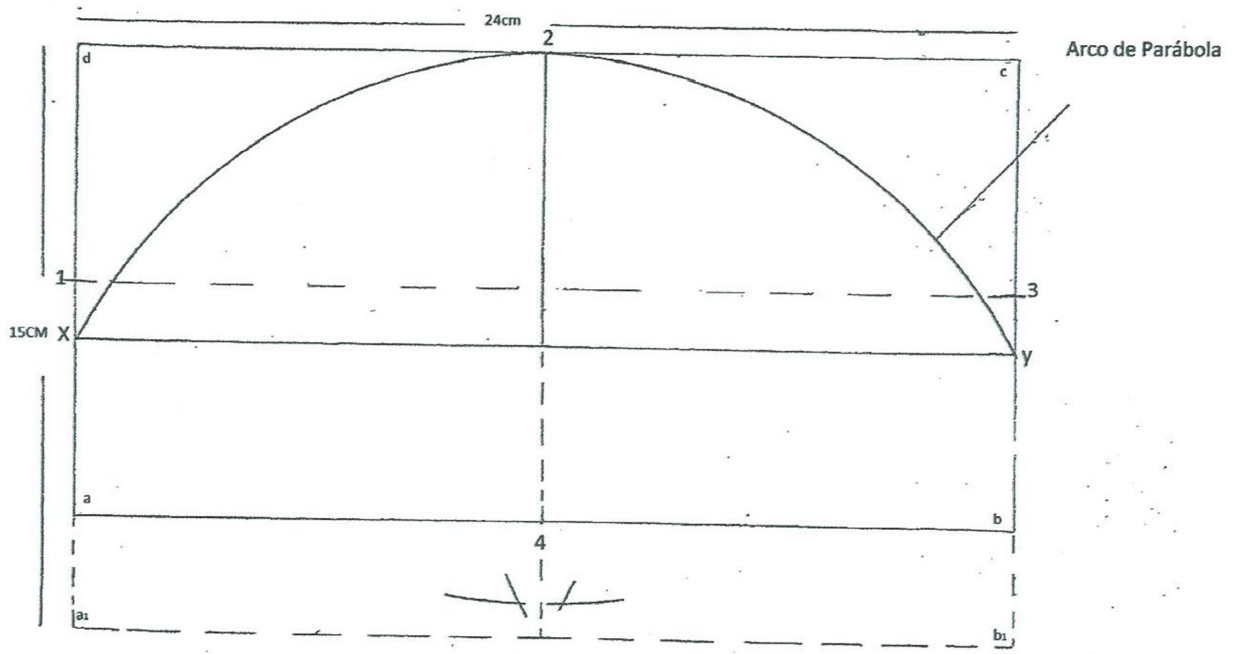


Fig.VIII

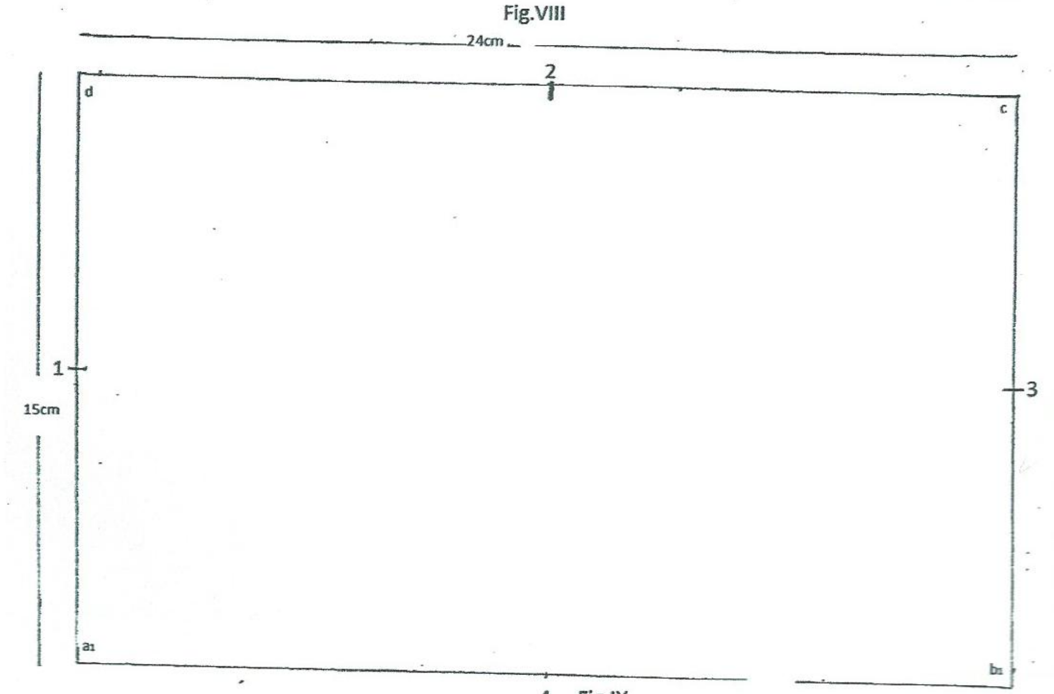


Fig.IX

Traça – se agora as retas 1 – 3 e 2 – 4 que divide este retângulo em quatro retângulos iguais, determinam o foco (o) e os eixos 1 – 3 e 2 – 4 da parábola a ser construída Fig. X.

Traça – se também os lados 1 – 2, 2 – 3... do losango inscrito no retângulo Fig. XI, e com uma abertura correspondente ao comprimento de quaisquer dos lados 1 – 2... do losango fixa – se o compasso nos vértices 1, 2, 3 e 4 do losango e traça – se as linhas que se interceptam em E, F, G e H respectivamente. Novamente com a mesma abertura fixa – se o compasso nos vértices dos ângulos formados pelas linhas que se interceptam em F e E e H e G e constrói – se a parábola inscrita no retângulo Fig. XI.

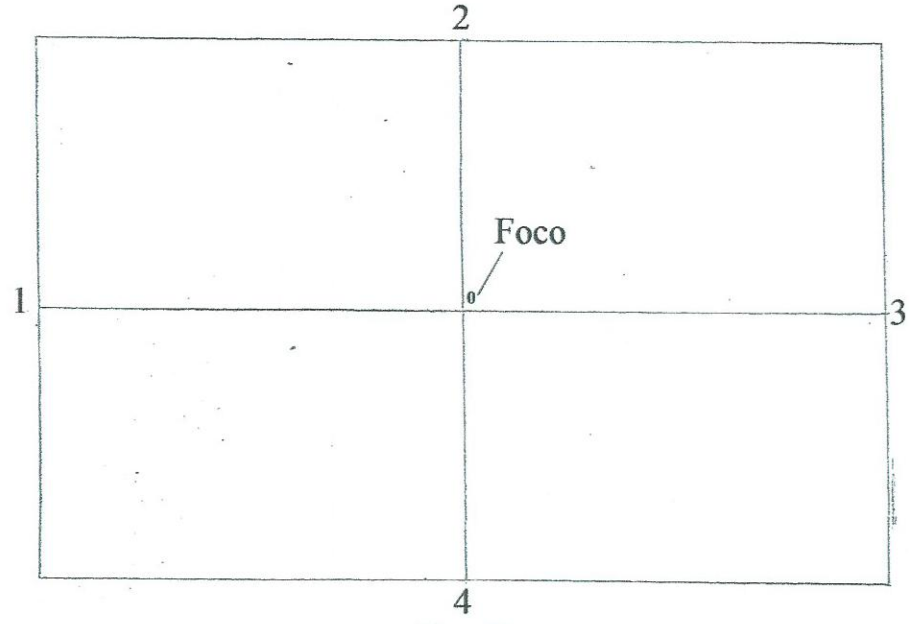


Fig. X

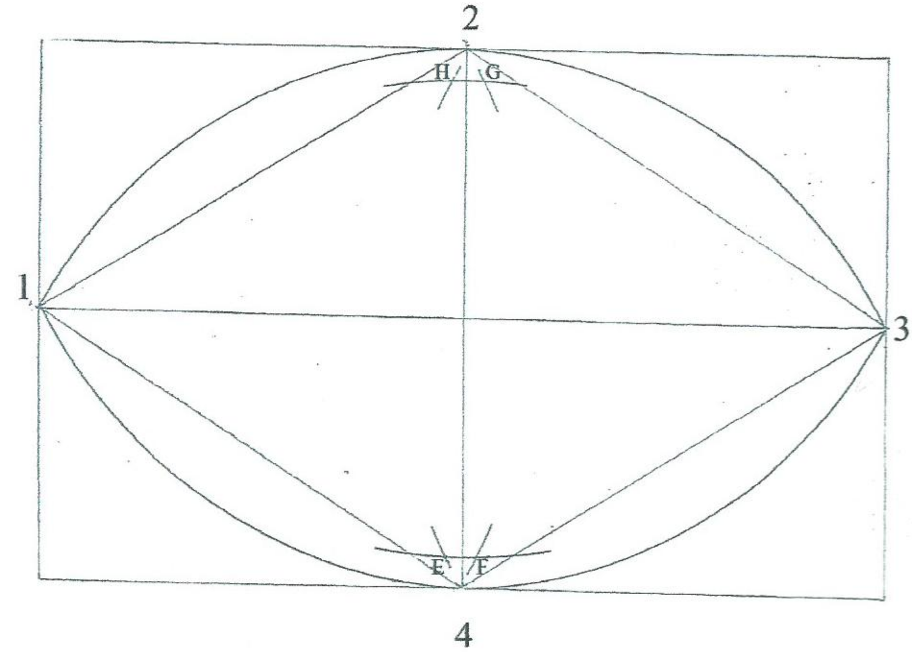


Fig. XI

RETIFICAÇÃO DE UMA PARÁBOLA

Novamente com a abertura (correspondente ao comprimento de qualquer dos lados do losango) da fig. XI, fixa – se o compasso nos vértices 1, 2, 3 e 4 desse losango e traça – se as linhas que interceptam em 5, 6, 7 e 8 respectivamente. Em seguida, e a partir dos vértices dos ângulos formados pelas linhas que se interceptam em 5 – F, 6 – E, 7 – H e 8 – G traça – se as linhas z, z_1, z_2 e z_3 que divide esta parábola em oito partes iguais e traça – se ainda os lados 1 – a, a – 2, ...do octógono inscrito na parábola Fig. XII.

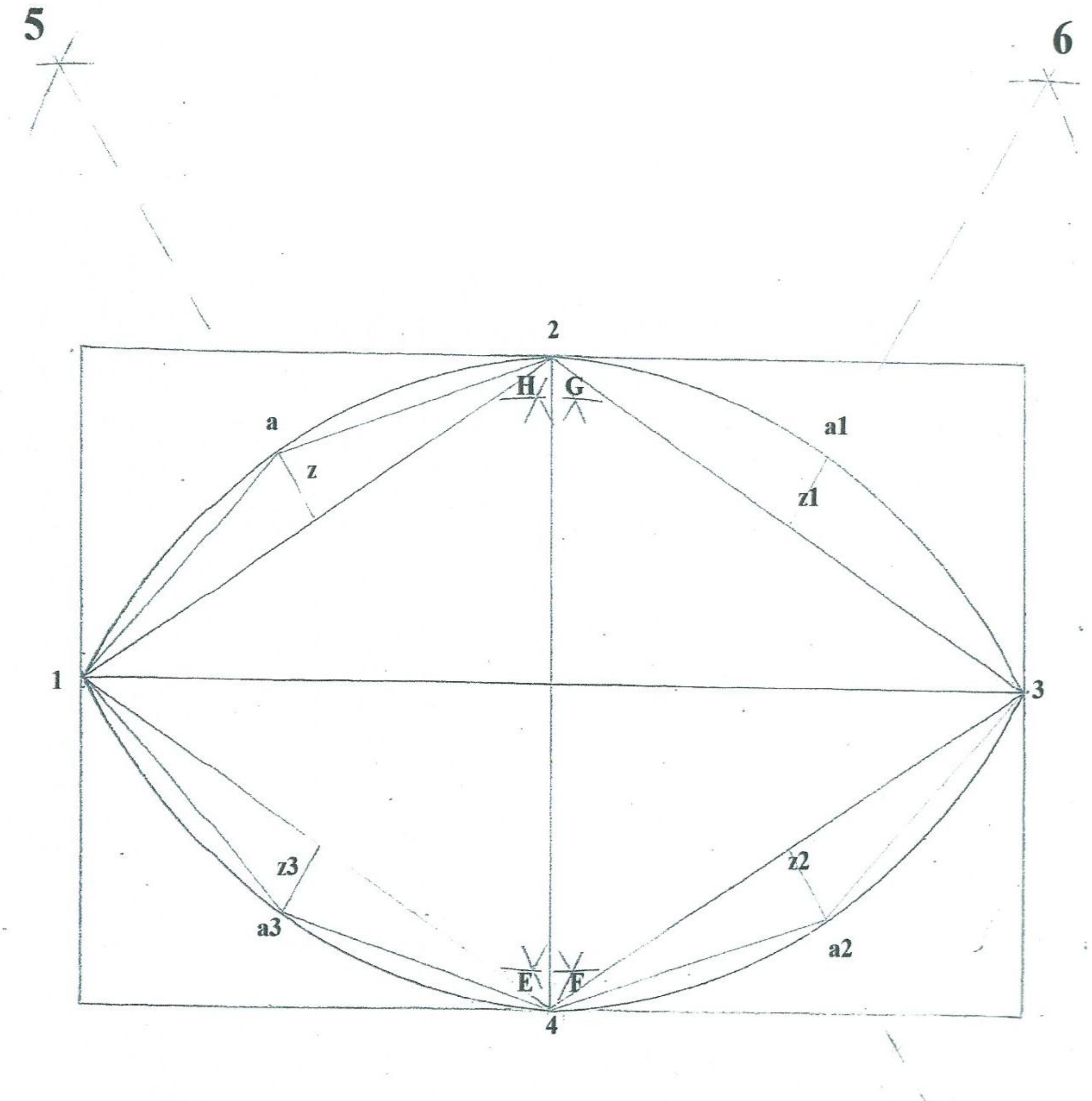


Fig. XII

Agora com uma abertura correspondente ao comprimento de quaisquer dos lados 1 – a, a – 2, ... do octógono inscrito na parábola Fig. XII, fixa – se o compasso nos vértices 1 e a, a e 2... desse octógono e traça – se as linhas que se interceptam em 9, 10, 11, 12... Em seguida, e a partir dos vértices dos ângulos formados pelas linhas que se interceptam em 9 – F, 10 – F... 11 – E, 12 – E... traça – se as linhas z_4, z_5, z_6, z_7... que divide esta parábola em dezesseis partes iguais e traça – se ainda os lados 1 – b, b – a, a – b_1, b_1 – 2... do hexadecágono inscrito na parábola Fig. XIII.

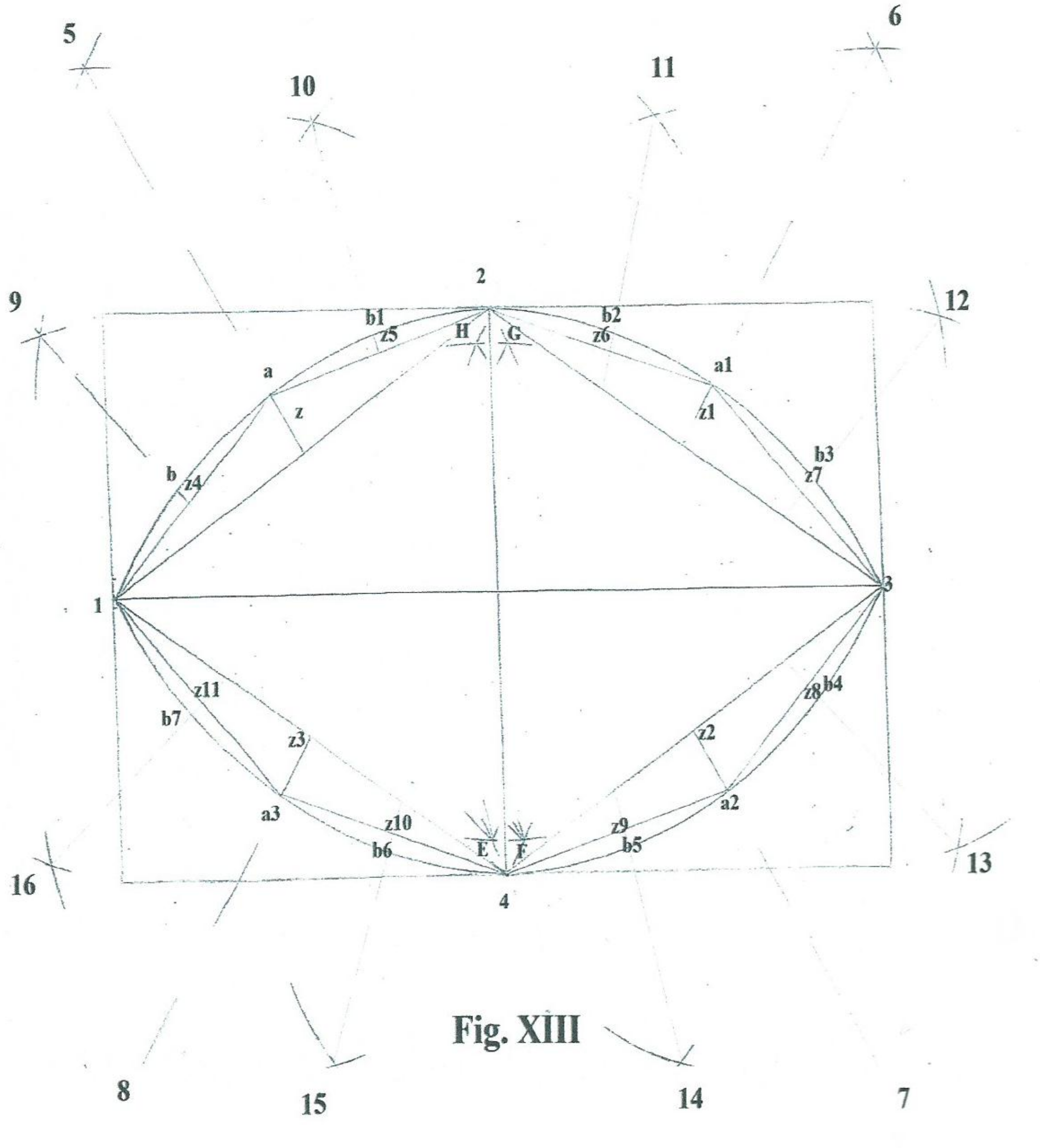


Fig. XIII

Ainda com uma abertura correspondente ao comprimento de quaisquer dos lados 1 – b, b – a... do hexadecágono inscrito na parábola Fig. XIII fixa – se o compasso nos vértices 1 e b, b e a, a e b_1... do hexadecágono e traça – se as linhas que se interceptam em 17, 18, 19, 20... em seguida, e a partir dos vértices dos ângulos formados pelas linhas que se interceptam em 17 – F, 18 – F, ... 21 – E, 22 – E... Traça – se as linhas z_{12}, z_{13}, z_{14}, z_{15}... que divide esta parábola em trinta e duas partes iguais, e traça – se ainda os 32 lados 1 – c, c – b, b – c_1, ... do polígono inscrito também na parábola Fig. XIV.

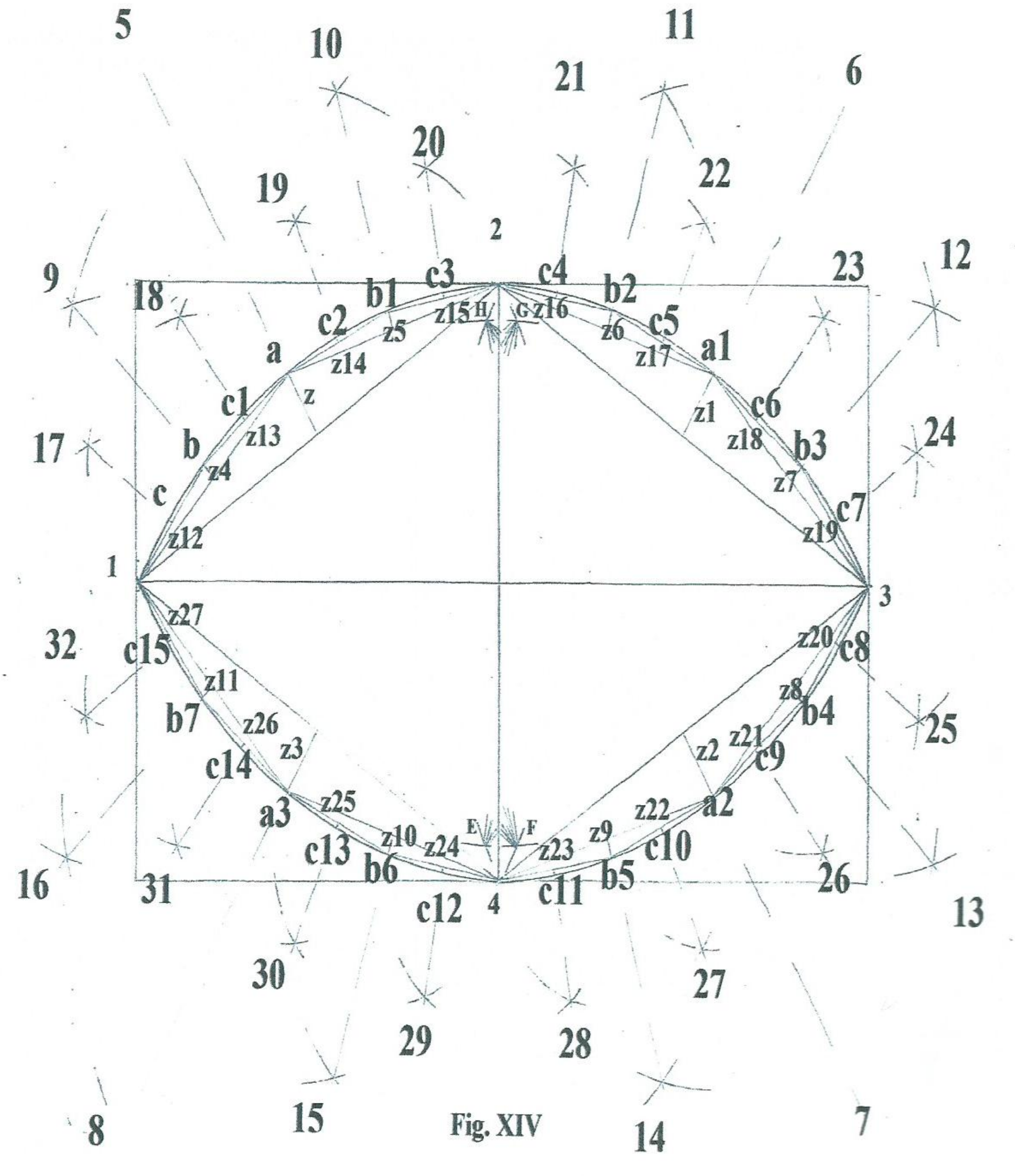


Fig. XIV

Finalmente com uma abertura correspondente ao comprimento de quaisquer dos 32 lados 1 – c, c – b, b – c_1... do polígono inscrito na parábola da Fig. XIV fixa – se o compasso nos vértices 1 e c, c e b, b e c... desse polígono e traça – se as linhas que se interceptam 33, 34, 35, 36, ... Em seguida, e a partir dos vértices dos ângulos formados pelas linhas que se interceptam em 33 – F, 34 – F, 35 – F... 41 – E, 42 – E... traça – se as linhas z_{28}, z_{29}, z_{30}, z_{31}... dividindo agora esta parábola em 64 retas iguais Fig. XV.

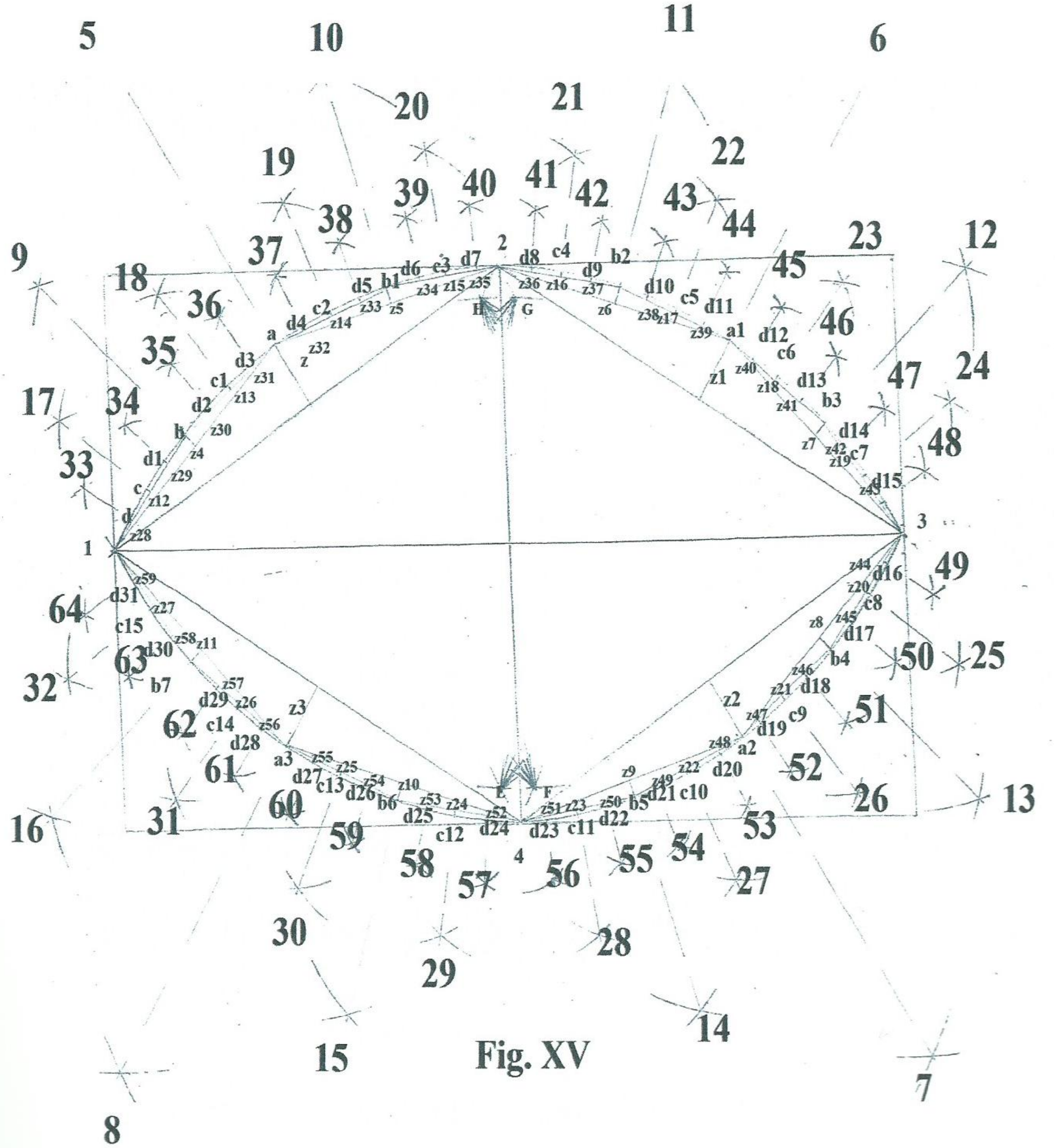


Fig. XV

"Ao dividir o perímetro (Pa) de uma parábola em 64 retas iguais o comprimento de quaisquer dessas retas é sempre igual a 64ª parte de três vezes a média dos comprimentos dos eixos da parábola também denominado diâmetro médio (dm) ou $\frac{Pa}{64} = \frac{3dm}{64}$"

Como neste caso os comprimentos dos eixos da parábola são iguais a 15 e 24 cm, seu diâmetro médio dm = $\frac{15x24}{2}$ = 19,5 cm sendo o diâmetro médio da parábola da fig. XV igual a 19,5 cm, pela fórmula $\frac{3dm}{64}$ acha – se o comprimento de quaisquer das 64 retas em que foi dividido o perímetro da parábola ou $\frac{3x19{,}5}{64}$ = 0,91406 cm, (para confirmar mede – se os comprimentos dos eixos da parábola e também o comprimento de quaisquer das 64 retas 1 – d, d – c, c – $d_{1...}$, em que foi dividido o perímetro da parábola, ver fig. XV.

"Como o comprimento do perímetro de uma parábola também é dado pelo produto da média dos comprimentos dos seus eixos por π ou Pa = dmπ. O comprimento da circunferência de um circulo de diâmetro igual a média dos comprimentos dos eixos de uma parábola é sempre igual ao comprimento do perímetro dessa parábola ou C = dmπ = Pa".

RELAÇÃO ENTRE OS COMPRIMENTOS DOS EIXOS E O PERÍMETRO DE UMA PARÁBOLA

Para confirmar a relação existente entre os comprimentos dos eixos e o perímetro de uma parábola divide – se cada uma das 64 retas 1 – d, d – c, c – d_1,... em que foi dividido o perímetro da parábola da Fig. XV em cinco partes iguais, correspondendo cada uma, a um ângulo de magnitude igual a um grau geométrico Fig. XVI, em seguida pelas fórmulas $R = \frac{\mathrm{dm}}{64}$ e $\mathrm{Pa} = \frac{\hat{a}R\pi}{5}$ acha – se o comprimento de quaisquer das 320 partes (retas) em que foi dividido o perímetro da parábola ou $R = \frac{19{,}5}{64} = 0{,}30468\mathrm{cm}$ e $\mathrm{Pa} = \frac{1 \mathrm{x} 0{,}30468\mathrm{x}3}{5} =$ 0,18280 cm, sendo:

R= 64ª parte da média dos comprimentos dos eixos da parábola da Fig. XVI.

dm= Diâmetro médio (média dos comprimentos dos eixos da parábola da Fig. XVI).

Pa = Comprimento de quaisquer das 320 partes (retas) em que foi dividido o perímetro da parábola da Fig. XVI.

â= Ângulo correspondente à 320ª parte da parábola da Fig. XVI medido no círculo da fig. XVI de diâmetro igual a média dos comprimentos dos eixos da parábola.

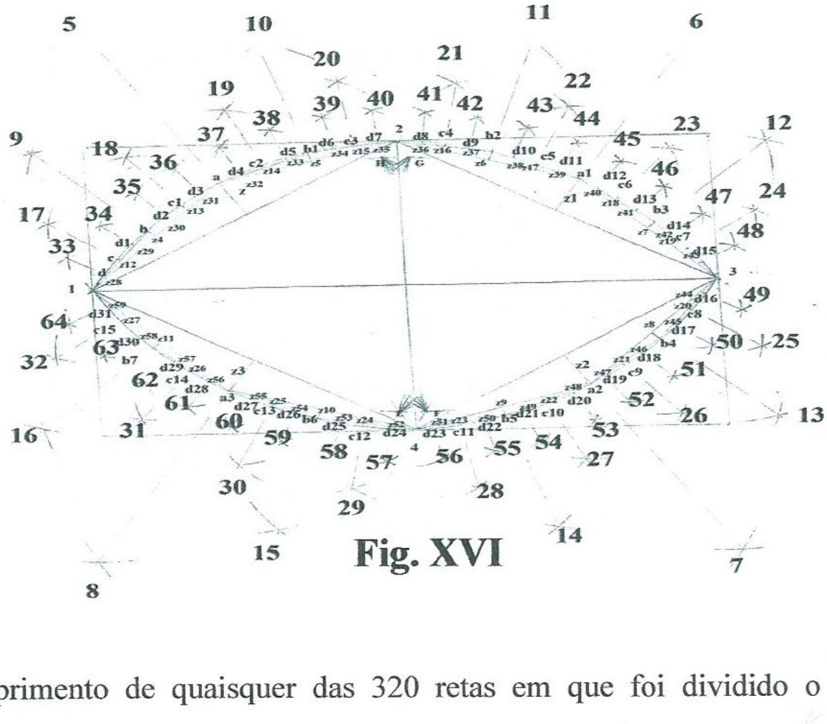


Fig. XVI

"Como o comprimento de quaisquer das 320 retas em que foi dividido o perímetro da parábola da Fig. XVI é igual a 0,18280 cm, o comprimento do perímetro dessa parábola é igual a 320 x 0,18280=58,5 cm (para confirmar mede – se o comprimento de quaisquer das 320 partes em que foi dividido o perímetro da parábola da Fig. XVI).

Como o perímetro de uma parábola é sempre igual ao perímetro de um círculo de diâmetro igual a média dos comprimentos dos eixos dessa parábola, para achar o comprimento do perímetro (Pa) de uma parábola ou o comprimento de partes do perímetro de uma parábola constrói – se um círculo de diâmetro igual a média dos comprimentos dos eixos da parábola e pela fórmula $\mathrm{Pa} = \frac{\hat{a}R\pi}{5}$ acha –se o comprimento do perímetro de uma parábola ou o comprimento de partes do perímetro de uma parábola, sendo:

P = comprimento do perímetro de uma parábola ou de partes do perímetro de uma parábola.

â= ângulo correspondente ao perímetro de uma parábola ou a qualquer parte do perímetro de uma parábola medido em um círculo de diâmetro igual a média dos comprimentos dos eixos da parábola.

$R = \frac{\mathrm{dm}}{64}$ (dm = média dos comprimentos dos eixos da parábola)

$\pi = 3$

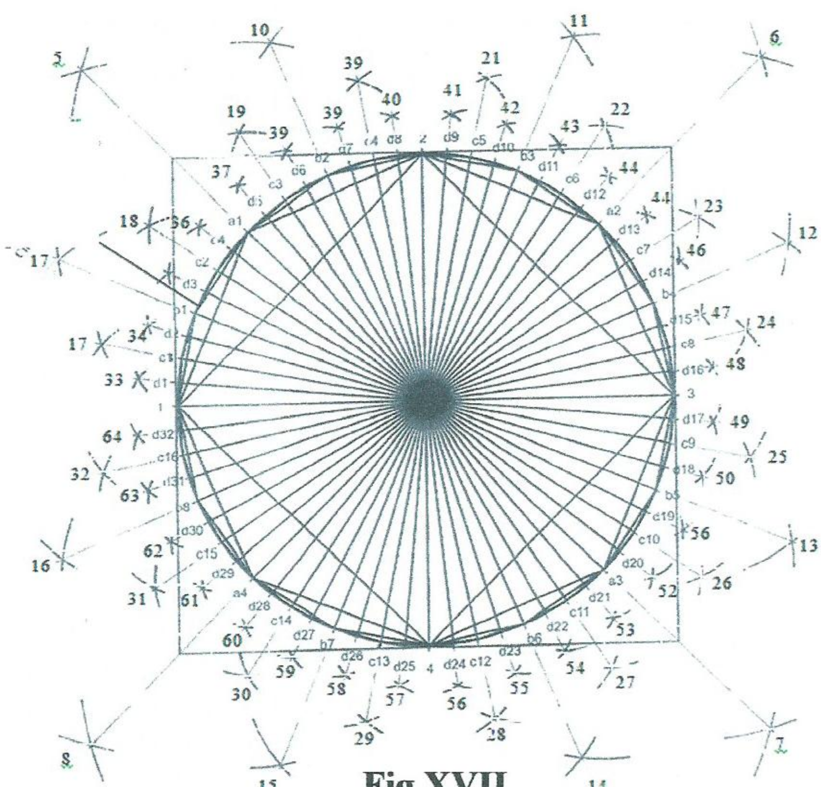


Fig XVII

Exemplo: Para achar o comprimento de qualquer parte do perímetro da parábola da Fig. XV mede – se no círculo da Fig. XVII o ângulo correspondente a parte que se deseja medir, neste caso 20° gg^{e} e pela fórmula $\mathrm{Pa} = \frac{\hat{a}R\pi}{5}$ tem – se: $\mathrm{Pa} = \frac{20 \times 0{,}30468 \times \pi}{5} = 3{,}656$ cm (para confirmar mede – se na parábola da Fig. XV e no circulo da Fig. XVII os comprimentos das retas 1 – d, d – c, c – d_1, ... correspondentes a magnitude do ângulo de 20° gg^{e}).

RELAÇÃO ENTRE AS ÁREAS DAS PARÁBOLAS E RETÂNGULOS

Para determinar a relação entre as áreas das parábolas e retângulos adota – se os mesmos procedimentos para relacionar áreas das elipses, observando que dado as desproporcionalidades entre os comprimentos dos eixos das parábolas os cálculos são em parte diferentes e nem sempre são exatos, é isto que justifica o nome "parábola".

No capitulo anterior, que trata das elipses, ficou demonstrado que a área de um retângulo de lados iguais aos comprimentos dos eixos de uma elipse é sempre igual a $^8/_9$ da área de um quadrado de lados iguais a média dos comprimentos dos eixos dessa elipse. Já no caso das parábolas isto não acontece, pois a área de um retângulo de lados iguais aos comprimentos dos eixos de uma parábola é sempre diferente da area de um quadrado de lados iguais a média dos comprimentos dos eixos dessa parábola fig. XVIII e XIX respectivamente.

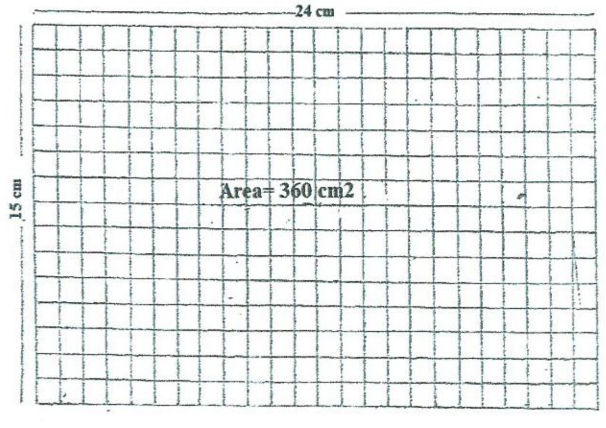


Fig. XVIII

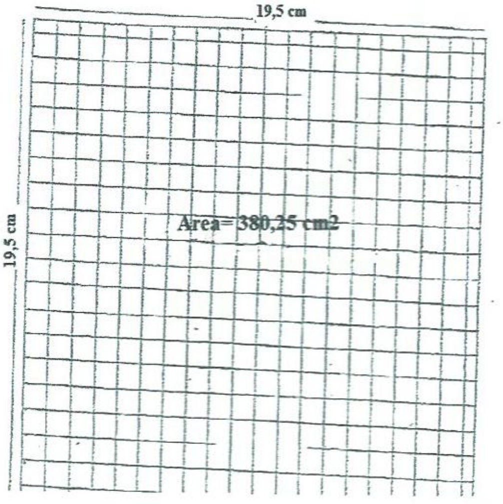


Fig. XIX

Entretanto, a área de uma parábola inscrita em um retângulo de lados iguais aos comprimentos dos eixos da parábola é sempre igual a $8/9$ da área de um círculo inscrito em um quadrado de lados iguais a média dos comprimentos dos eixos dessa parábola fig. XX e XXI respectivamente.

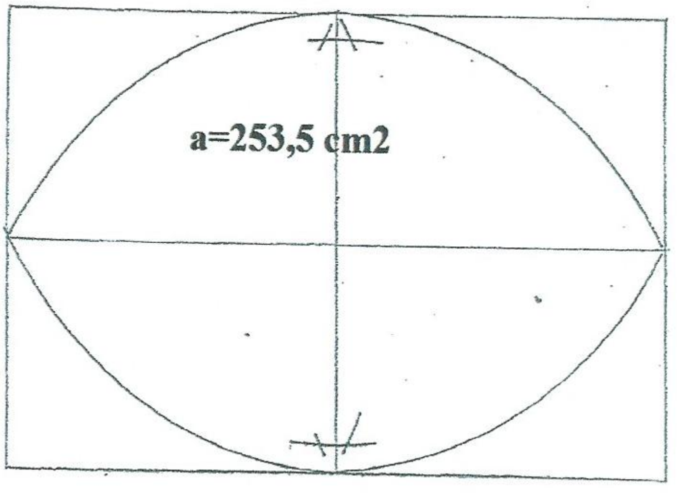


Fig. XX

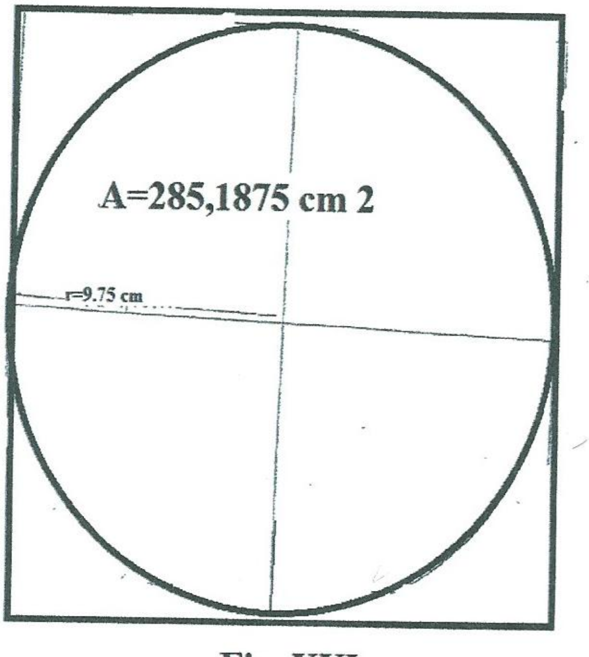


Fig. XXI

Assim, para confirmar a área de uma parábola inscrita em um retângulo, determina – se primeiro a área do quadrante de um círculo inscrito em um quadrado de lados iguais a média dos comprimentos dos eixos da parábola, ou seja: como o perímetro do quadrante do círculo inscrito no quadrado da fig. XIX mede 14,625 cm de comprimento, constrói – se o triangulo ABC cuja altura (h) e base (b) tenham comprimentos (9,75 e 14,625cm) iguais ao raio e perímetro do quadrante do círculo e pela fórmula $A = \frac{h.b}{2}$ acha – se a área do triangulo ABC que corresponde a área do quadrante do círculo ou $A = \frac{9,75.14,625}{2}$=71,296875 cm^2 fig. XXII.

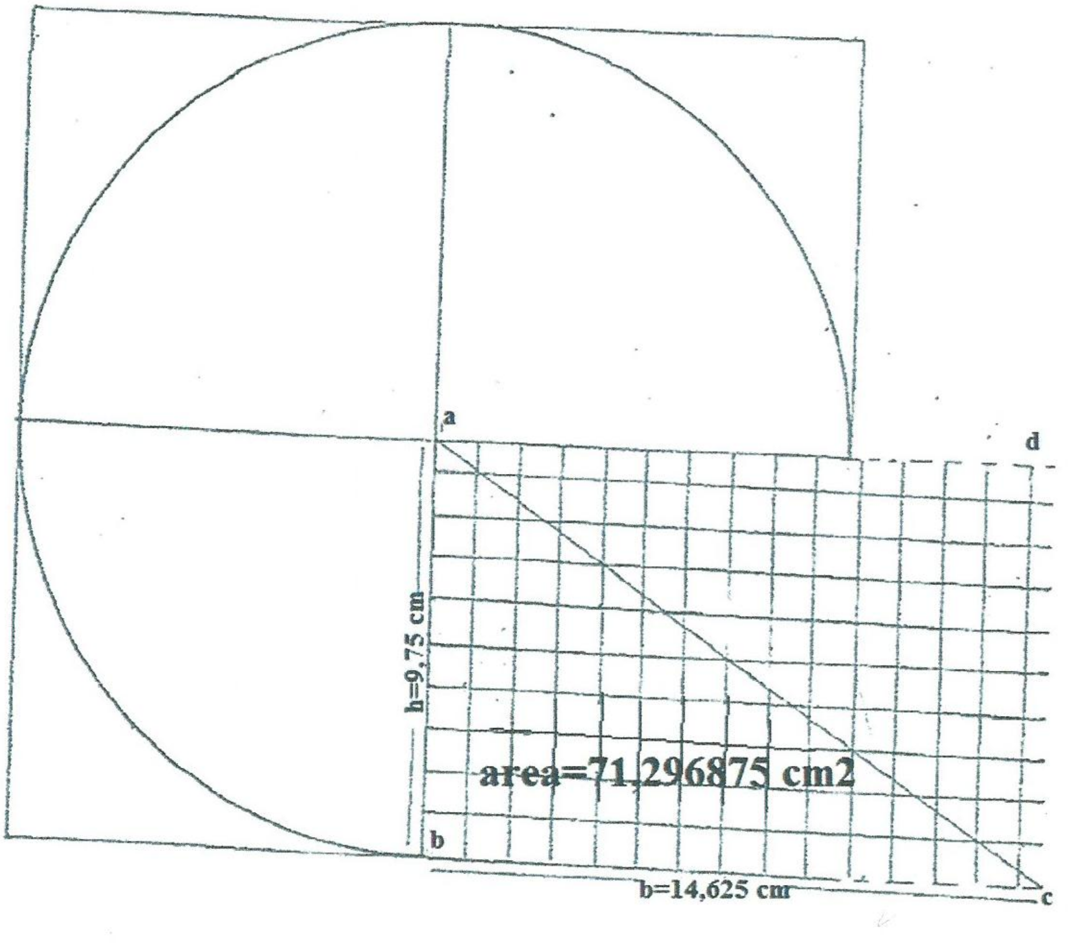


Fig. XXII

Como a área de uma parábola inscrita em um retângulo é sempre igual $^8/_9$ da área de um círculo inscrito em um quadrado de lados iguais a média dos comprimentos dos eixos da parábola, a área do quadrante de uma parábola também é igual a $^8/_9$ da área do quadrante desse círculo ou $^8/_9$ de 71,296875 = 63,375 cm^2.

Para confirmar a área do quadrante da parábola constrói – se também o triângulo $A_1B_1C_1$ cuja altura (h) tenha comprimento igual a $^8/_9$ do raio do círculo da fig. XXI ou 8,666 cm e base (b) igual ao comprimento do perímetro do quadrante da parábola da fig. XX ou 14,625cm e pela fórmula $A = \frac{h.b}{2}$ tem –se $A = \frac{8{,}666.14{,}625}{2}$ = 63,374999 cm^2 fig. XXIII.

Sendo a área do quadrante da parábola da fig. XX igual 63,375 cm^2, a área da parábola é igual 63,375.4=253,5 cm^2.

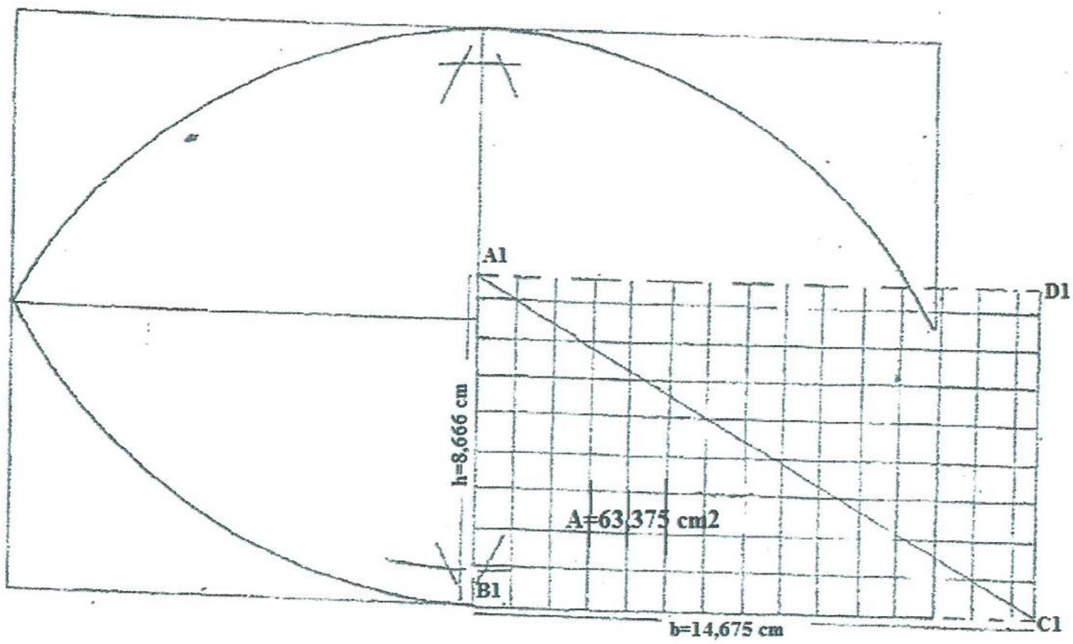


Fig. XXIII

(Para confirmar o comprimento do quadrante da parábola da fig. XX mede – se os comprimentos da retas 1 – d, d – c, c – d_1, ... correspondentes ao comprimento de quaisquer dos quadrantes da parábola fig. XV)

BREVE CONCEITO GEOMÉTRICO

Ângulo = Magnitude ou grandeza de uma curva descrita dada em grau geométrico.

Diâmetro = Maior reta que une dois pontos de uma circunferência dividindo o círculo em partes iguais.

Ponto = Princípio das trajetórias dos movimentos e das formas materiais (geométricas).

Só idéias verdadeiras subverte crenças milenares.

(José Delmar)