Universidade do Estado do Rio de Janeiro

DEFINIÇÕES INCLUSIVAS E NÍVEIS DE VAN HIELE: ASPECTOS DIDÁTICOS E LÓGICOS

Autor: **ORLANDO DE ARAUJO**

Orientadora: Prof^{a}: **Carmen Especotti da Silva**

UERJ

FEVEREIRO/ 2004

FOLHA DE EXAME

DEFINIÇÕES INCLUSIVAS E NÍVEIS DE VAN HIELE: ASPECTOS DIDÁTICOS E LÓGICOS.

Orlando de Araujo

Monografia submetida ao corpo docente do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Banca Examinadora:

Profª: ____

Carmen Especotti da Silva - Orientadora
Professora Assistente IME/UERJ

Profª: ____

Mariluci Ferreira Portes
Professora Assistente IME/UERJ

Profª: ____

Mara de Carvalho de Sousa
Professora A. Ensino IME/UERJ

Resultado:...................................
Conceito:....................................
Grau Obtido:..............................
Rio de Janeiro, .../....../.........

DEDICATÓRIA

À minha esposa Cacilda, por sempre me ter apoiado, mesmo nos momentos mais difíceis.

AGRADECIMENTOS

Ao meu pai e à minha mãe, que me passaram, em casa, as primeiras lições de Matemática.

À sempre querida professora Vera Lúcia Amarante França (*in memorian*) que, com sua dedicação, me ensinou a beleza do ofício de professor.

Aos meus alunos dos cursos Pré-vestibulares de Negros e Carentes e do Centro Cultural de Desenvolvimento da Cidadania, ambos no Jacarezinho, que participaram do processo de pesquisa.

Aos alunos **do Centro Federal de Educação Tecnológica do Rio de Janeiro – Cefet-RJ e do Colégio Pedro II da unidade Engenho Novo, que responderam aos questionários descritos neste trabalho.**

Aos colegas e professores **da Uerj, que colaboraram com críticas e sugestões durante o processo de elaboração desta monografia.**

SUMÁRIO

RESUMO

A capacidade de identificar e generalizar conceitos é cada vez mais essencial na sociedade do conhecimento. A partir dessa constatação, este trabalho utiliza como o estudo do casal Van Hiele a respeito dos níveis de desenvolvimento do raciocínio em Geometria, procurando identificar as implicações do uso de definições inclusivas nesse processo.

Procura-se, com base nos resultados de questionários aplicados a alunos da Licenciatura da Uerj, bem como a alunos dos colégios Cefet-RJ e Pedro II, instituições públicas cujo nível de ensino é considerado bom, identificar deficiências de natureza conceitual e/ou lógica, relacionadas à Geometria Plana, que são comentadas segundo a abordagem das definições inclusivas ou exclusivas.

A dissertação está organizada segundo a estrutura a seguir: a Introdução, que destaca as questões motivadoras e orientadoras do trabalho; o Referencial Teórico, em que se descreve o trabalho do casal Van Hiele, as discussões em andamento a respeito do uso das definições inclusivas ou exclusivas e, por fim, as discussões

acadêmicas a respeito dos conceitos utilizados nos questionários, incluindo as observações de natureza lógica. Na terceira parte, são descritos o método e os resultados da pesquisa propriamente dita. Na Conclusão, são apresentadas as principais constatações da pesquisa, no que tange ao panorama das definições de natureza conceitual e lógica encontradas, bem como à importância das definições inclusivas no processo descrito.

Para dúvidas, críticas ou sugestões, encaminhe mensagem ao endereço eletrônico orlandoa@bol.com.br.

INTRODUÇÃO

O reconhecimento e a generalização de conceitos constituem aptidão cada vez mais exigida dos alunos e profissionais do mundo atual, sendo imprescindíveis para a apreensão e o estudo de uma realidade cada vez mais complexa.

Na área da Tecnologia da Informação, por exemplo, fala-se em reutilização de código de programas, por meio da construção de classes de objetos que podem "herdar" características de objetos mais gerais. Assim, podem-se imaginar programas construídos para modelar, por exemplo, um móvel da casa, cujo código pode ser reaproveitado quando for necessária a modelagem de uma cadeira ou uma cama, já que ambas podem ser concebidos como espécies do gênero móvel.

Para o ensino de Matemática, pode-se imaginar que essas novas exigências não deveriam trazer maiores transtornos, uma vez que o processo definição-generalização é intrínseco ao modo de pensar matemático. A reutilização, por sua vez, é ferramenta utilizada rotineiramente na resolução de problemas, como afirma POLYA (1978):

> ***"É difícil imaginar um problema absolutamente novo, sem qualquer semelhança ou relação***

> ***com qualquer outro que já haja sido resolvido; se um tal problema pudesse existir, ele seria insolúvel. De fato, ao resolver um problema, sempre aproveitamos algum problema anteriormente resolvido, usando o seu resultado, ou o seu método, ou a experiência adquirida ao resolvê-lo".*** (p. 36)

Entretanto, conquanto a experiência da generalização seja essencial no aprendizado de Matemática, muitos alunos apresentam sérias deficiências para generalizar, ou mesmo para reconhecer um objeto como pertencente a uma classe. São inúmeros os exemplos citados de alunos que, mesmo concluintes do ensino médio, não conseguem reconhecer características comuns a números naturais, inteiros e racionais, ou entre figuras geométricas, como um retângulo e um quadrado.

Nessas condições, o aprendizado da Matemática se torna uma sucessão infindável de fórmulas a serem memorizadas, sem que os conceitos sejam compreendidos pelos alunos de forma consistente. Durante uma aula sobre áreas de triângulos em curso vinculado ao Pré-Vestibular de Negros e Carentes (PVNC) na favela do Jacarezinho em 2003, por exemplo, vários alunos demonstraram desconhecer a possibilidade de calcular a área de um triângulo equilátero usando a fórmula do semiproduto da base pela altura, isto é, o "triângulo eqüilátero" não foi reconhecido como um objeto da classe de objetos "triângulo".

O casal Pierre van Hiele e Dina van Hiele-Geoldof identificou dificuldades de aprendizado em seus alunos do curso secundário na Holanda, elaborando, então, uma teoria em que o nível de desenvolvimento de um aluno de Geometria é resultado da passagem pelos níveis anteriores de compreensão de conceitos, por meio da vivência de atividades adequadas e organizadas pelo professor. Nessa abordagem, o aluno passa sucessivamente por níveis distintos denominados reconhecimento, análise, abstração, dedução e rigor, nessa ordem.

Já no primeiro nível, quando se espera que o aluno seja capaz de classificar recortes de quadriláteros em grupos de quadrados, retângulos, paralelogramos, losangos e trapézios, nota-se a importância da clareza das definições para o progresso do aluno. Se ele souber distinguir claramente o que significa cada conceito, a tendência natural é que comece a separar atributos de cada um dos objetos definidos e, paulatinamente, organize uma hierarquia de classes desses objetos (por exemplo, ele é capaz de concluir que “todo quadrado é um retângulo”). Como se procurará demonstrar neste trabalho, essa capacidade de hierarquização de conceitos é fundamental para que o aluno atinja os níveis mais elevados de van Hiele, o que torna necessário que as definições matemáticas sejam concebidas de forma a desenvolver essa capacidade.

Ao contrário do que possa parecer à primeira vista, entretanto, não existe ainda entre os profissionais da Matemática um consenso a respeito de inúmeras definições, inclusive na Geometria.

No primeiro semestre de 2003, durante uma aula de Introdução à Lógica, na Uerj, surgiu uma controvérsia a respeito do conceito de triângulos isósceles. Resumidamente, a discussão se deu sobre a existência ou não de um atributo naquele objeto relativo ao denominado “terceiro lado”: era ponto pacífico que, para um triângulo ser isósceles, é necessário que ele possua um par de lados de mesmo comprimento, mas não havia consenso sobre o terceiro lado. Teria ele que ter comprimento diferente dos outros dois, ou não? Em outras palavras, os triângulos equiláteros são também isósceles?

As idéias em conflito definiam os triângulos isósceles segundo um dos critérios abaixo e tiveram tamanho impacto no decurso da aula, que prejudicaram o desenvolvimento da lógica argumentativa propriamente dita, já que os dois conjuntos de premissas eram irreconciliáveis:

1. Aquele que possui pelo menos dois lados de mesmo comprimento;

2. Aquele que possui dois lados de mesmo comprimento e um terceiro lado de comprimento diferente dos demais.

Conforme se constatou na pesquisa, a questão polêmica faz parte de uma discussão mais ampla envolvendo as denominadas "definições inclusivas", ou "hierárquicas", em oposição às "exclusivas", ou "particionadas". Nas definições anteriormente apresentadas para triângulos isósceles, a de número 1 pode ser considerada inclusiva e a de número 2 é exclusiva.

Tomando-se como referência o trabalho dos van Hiele, estima-se que a utilização de diferentes grupos de definições possua influência na progressão dos alunos entre os diversos níveis.

Este trabalho tem por objetivo descrever as duas vertentes conceituais mencionadas e possíveis conseqüências para o aprendizado de Geometria e o desenvolvimento dos alunos em Lógica.

Desta forma, busca-se responder à seguinte questão:

"**Que tipo de definições são mais adequadas ao desenvolvimento do aluno nos níveis de van Hiele, as hierárquicas ou as particionadas**?".

REFERENCIAL TEÓRICO

Como referencial desta pesquisa, serão abordados tópicos dos principais trabalhos utilizados como subsídios para elaboração deste texto. Os aspectos relacionados às definições matemáticas em geral, à distinção entre definições inclusivas e exclusivas, à descrição dos níveis de van Hiele e às questões de natureza Lógica são descritos em seções distintas.

1.1 A incerteza das definições matemáticas

Em qualquer ramo do conhecimento, o ato de definir um objeto é essencial para que ele possa ser descrito de forma sistemática. Como assinala DEMO (1985):

> **"Um dos primeiros atos do cientista é colocar alguma ordem nas idéias, formular categorias descritivas que circundem o objeto, dividir em partes. É preciso definir, distinguir, classificar, opor etc. São todas atividades da lógica, fundamentais para que o objeto apareça com horizonte claro" (p. 35).**

Nesse mesmo texto, que se destina primordialmente à aplicação da Metodologia Científica nas ditas ciências sociais, o autor coloca a Matemática como disciplina privilegiada e livre de contradições:

> **"A expressão mais límpida da lógica é a matemática, que assim pode ser, porque é estritamente formal. É pura forma. Uma reta não tem conteúdo e por isto é exata. Em ciências sociais não temos fenômenos deste tipo, mas a lógica é aplicável como dedução teórica sem contradições." (p. 34)**

Entre os matemáticos, há também quem concorde com essa visão ideal, embora haja discussões de caráter epistemológico, como assinala TAHAN (1965), citando o filósofo Orris Soares:

> **"Sobre o aspecto definitivo da definição matemática, os racionalistas alegam que definições como as do quadrado, do círculo, etc, dadas pelos geômetras modernos, não diferem fundamentalmente das definições euclidianas.**
>
> **Outros, que não os racionalistas, opõem certas reservas no caráter definitivo atribuído às definições matemáticas, não as tendo por imutáveis, admitindo a possibilidade de diversas definições."** (p. 51)

Ao contrário do que podem pensar os cientistas sociais e alguns matemáticos, entretanto, as definições matemáticas não são perfeitas e imutáveis, como gostariam os formalistas extremados. Contrariando Hobbes, para quem a Matemática seria a "única Ciência que até aqui aprouve a Deus conceder à humanidade", LAKATOS (1978) abre a sua "Lógica do Descobrimento Matemático" declarando como objetivo:

> **"... formular a questão de que a matemática não-formal, semi-empírica, não progride mediante monótono aumento do número de teoremas indubitavelmente estabelecidos, mas mediante incessante aperfeiçoamento de opiniões por especulação e crítica, pela lógica das provas e refutações"** (p. 18).

Naquele brilhante trabalho, as personagens de Lakatos são estudantes que, mediados pelo professor, discutem com veemência o enunciado clássico de Euler de que V – A + F = 2, tentando prová-lo para todo e qualquer poliedro convexo, o que motiva dúvidas reiteradas sobre o que seja um poliedro. Em certo momento, Alfa, um dos alunos, diante dos sucessivos ajustes na definição de poliedro que outro aluno, Delta, realiza para tornar verdadeira a relação de Euler, declara:

> **"Admira-me sua patológica habilidade em inventar uma definição após outra como barricadas contra a falsificação de suas idéias insignificantes. Por que não definir logo o**

poliedro como um sistema de polígonos que satisfaz a equação V – A + F = 2? Esta Definição Perfeita (...) liquidaria a questão de uma vez por todas. Não haveria necessidade de investigar o assunto mais a fundo” (p. 31).

O autor reconhece, portanto, que, mesmo quando se trata de definições matemáticas, pode haver, e freqüentemente há, dúvida e incerteza, o que não diminui a importância do ato de definir, seja em Matemática ou em qualquer outro ramo do conhecimento.

Na Geometria Euclidiana, apesar da aura de perfeição que circunda a História da Matemática e da Filosofia grega, também o consenso não é absoluto. TAHAN (1965), citando o Professor Pedro Tavares, diz:

Os enunciados das várias noções e proposições, primeiras euclidianas, não possuem um sentido completo e rigoroso: são breves e até mesmo obscuras. (p. 99)

LINDQUIST (1994) vai ainda mais longe e, citando Allendoerfer, diz que:

“Em geometria... Não há concordância nem mesmo quanto a seu objeto. Oswald Veblen disse, bastante seriamente, que *a geometria é o que os geômetras fazem*” (p. 28).

Mas em que consiste o ato de definir? TAHAN (1966), citando o Professor Miranda Neto, esclarece:

> “**Definir significa dar a enunciação dos atributos e qualidades de uma coisa de modo a distingui-la de todas as outras coisas**” (p. 23).

Entretanto, nem sempre é possível, ou viável, definir todas os objetos. O matemático Amoroso Costa, citado em TAHAN (1966), considera inevitável a existência de noções primitivas, como o ponto na geometria euclidiana:

> “**As noções primeiras são apresentadas sem definição. Nada impede que lhes atribuamos uma significação intuitiva e concreta, mas essa significação se conservará extensiva à dedução e aos enunciados dos teoremas**” (p. 24).

Excluídas as noções primitivas, usualmente aceitas sem definição, os outros conceitos matemáticos devem ser cuidadosamente definidos, levando-se em consideração especialmente os aspectos didáticos envolvidos. Nessa linha de pensamento, TAHAN (1966) enfatiza a sua importância:

> **“De uma boa definição poderá resultar:**
> 1) **melhor compreensão das teorias;**
> 2) **simplificação de um problema;**
> 3) **precisão de raciocínio;**
> 4) **correção de linguagem”** (p. 33)

Poincaré, citado também nesse trabalho, sintetiza de forma inequívoca o destinatário das definições:

> "**Uma boa definição – adverte Poincaré – é aquela que, sendo certa, é facilmente compreendida pelos alunos**" (p. 59).

Esse aspecto da necessidade de compreensão pelos alunos é relativamente claro. Mas o que significa uma definição certa? TAHAN (1966) apresenta também as sete leis gerais para definições, além de vários exemplos e contra-exemplos associados a cada uma delas:

> **1) A definição deve substituir rigorosamente o objeto definido**
>
> **2) A definição deve ser mais clara do que o definido**
>
> **3) O definido não deve entrar na definição**
>
> **4) A definição deve ser breve**
>
> **5) Na definição só podem figurar conceitos simples, já conhecidos, ou conceitos admitidos sem definição**
>
> **6) A definição não deve ser deficiente nem deve ser superabundante**
>
> **7) A definição deve convir ao definido e só ao definido** (p. 36-49)

Nota-se que as leis gerais apresentam critérios bem nítidos a respeito do que seria uma boa definição, mas ainda insuficientes para decidir entre duas opções, especialmente quando se trata de definições nominais, isto é, aquelas em que damos um nome a um objeto de modo arbitrário. Nesse caso, a dificuldade reside em identificar infrações às leis gerais em uma delas, o que nem sempre é fácil.

O próprio Malba Tahan parecia ciente dessas dificuldades, ao transcrever, na folha de rosto de "O Problema das Definições em Matemática":

> **"*Omnia definitio periculosa est* (toda definição é perigosa)"**

De fato, TAHAN (1965) reconhecia a dificuldade de se alcançar a "definição perfeita" que, no entendimento do matemático alemão Leopoldo Kronecker,

> **"deve conter um critério claro e seguro que permita, para o objeto definido, assegurar se ele compreende ou não a definição formulada"** (p. 59).

Nem sempre, afirmava Tahan, é possível estabelecer essa definição. Por exemplo, diz-se que um número é transcendente quando não pode ser raiz de equação algébrica, do grau M, com coeficientes racionais, mas não há critério fixo para determinar a transcendência ou algebricidade de um número qualquer N, o que inviabilizaria a simples exclusão de conceitos que não pudessem ser “perfeitamente” definidos.

O assunto discutido neste trabalho relaciona-se principalmente com as leis gerais seis e sete, retromencionadas. Por exemplo, ao se exigir que o terceiro lado dos triângulos isósceles seja diferente dos demais, não se estará criando uma definição superabundante, violando a regra seis, supondo que a essência do objeto está na igualdade de dois lados e não na diferença da base? Ou, pelo outro lado, ao se considerar o triângulo equilátero como uma espécie do gênero triângulo isósceles, não haverá infração à regra sete?

Haverá uma definição CERTA para esses e outros conceitos da Geometria?

E m TAHAN (1965), encontram-se diversos momentos em que o autor, embora reconhecendo a dificuldade do ato de definir, assume a existência de definições estritamente corretas e de definições incorretas. Por exemplo:

> **“De acordo com as considerações feitas, podemos concluir que a verdadeira definição de ângulo seria a seguinte: Se de um ponto O de um plano traçamos sobre esse plano duas semi-retas distintas, não colineares, esse plano ficará dividido em duas regiões. Cada uma dessas regiões se denomina um ângulo.** “ (p. 145)

Ou, a seguir, referindo-se à definição adotada por um grupo de professores, que consideravam que ângulos adjacentes teriam que ser suplementares.

> **“Trata-se de uma definição sem cabimento e inconveniente”** (p. 166)

Mesmo de forma parcial, todavia, o autor reconhece que as definições em Matemática podem se alterar ao longo do tempo, como neste trecho, em que critica uma definição de ângulo obtida em um livro antigo:

> **Esse exemplo mostra, bem claramente, como evoluiu durante meio século o conceito de rigor em Matemática. Vê-se que certa definição, tida em 1909 como impecável, endossada por eminente professor, homem de ciência de renome no magistério, hoje (1965) obsoleta, condenada pelos lógicos e rejeitada pelos matemáticos mais tolerantes.** (p. 149)

1.2 A controvérsia entre as definições inclusivas e exclusivas

A definição de conceitos na modalidade inclusiva, também chamada hierárquica, é utilizada com freqüência no ensino e na literatura de Geometria, mas há pouca discussão a respeito das implicações didáticas e lógicas daí decorrentes.

Uma definição inclusiva para retângulo, por exemplo, seria "paralelogramo que apresenta os 4 ângulos internos congruentes". Como o quadrado possui esse atributo, ele é uma espécie do gênero retângulo, isto é, o quadrado é incluído na extensão do conceito de retângulo.

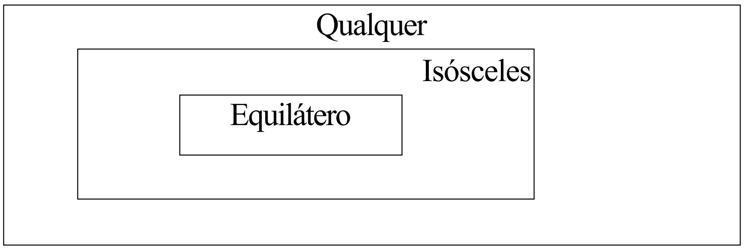
Se, entretanto, for adotada a abordagem exclusiva, também chamada particionada, essa relação não é mais verdadeira. Tomando-se o retângulo como o "paralelogramo que apresenta os 4 ângulos internos congruentes mas não possui todos os lados de mesmo comprimento", o quadrado é excluído da extensão do conceito de retângulo.

Uma classificação hierárquica de triângulos adotaria, por exemplo, o critério de considerar a existência de um triângulo qualquer, de um triângulo com pelo menos dois lados de mesmo comprimento (isósceles) e, finalmente, de um que possua os três lados de mesmo comprimento (equilátero), considerando os equiláteros casos especiais dos isósceles. Ou também, em relação aos quadriláteros convexos, consideraria que existem os que não possuem nenhum par de lados paralelos (qualquer), os que possuem pelo menos um par de lados paralelos (trapézios) e os que possuem dois pares de lados paralelos (paralelogramos), o que torna os paralelogramos casos especiais de trapézios.

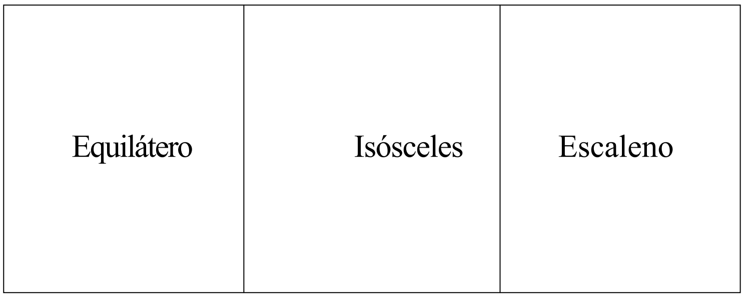
Já a classificação particionada consideraria que o conjunto dos triângulos pode ser particionado nos subconjuntos dos escalenos (nenhum par de lados de mesmo comprimento), isósceles (exatamente dois lados congruentes) e equiláteros (três lados congruentes). De modo semelhante, os quadriláteros convexos são divididos em trapezóides (não possuem lados paralelos), trapézios (possuem exatamente um par de lados paralelos) e paralelogramos (dois lados paralelos).

As figuras abaixo representam graficamente as duas classificações de triângulos mencionadas.

Abordagem Hierárquica



Abordagem Particionada



TAHAN (1966) já havia reconhecido algumas características hierárquicas na geometria de Euclides:

"Sente-se, como notou Brunschwicg, nas definições euclidianas a influência

aristotélica de hierarquizar as noções básicas da Ciência" (p. 103).

Isso não impediu que, nesta mesma obra, ele combatesse veementemente o que hoje é conhecido como abordagem hierárquica das definições, ao citar exemplos válidos e inválidos de definições pela aplicação da prática aristotélica de definir conceitos utilizando o gênero próximo como referência:

"Admitamos, porém, que o professor tenha feito para os quadriláteros convexos uma classificação ilógica e que, de acordo com sua classificação, o *quadrado* tenha por gênero próximo o *retângulo.*

Nesse caso o professor poderá definir o quadrado da seguinte forma:

Quadrado é o retângulo que tem os lados iguais.

E essa definição estará certa?

Sim, do ponto de vista lógico está certa.

É inaceitável, porém, do ponto de vista prático, do ponto de vista artístico e, até mesmo, do ponto de vista puramente geométrico.

Vejamos:

Na prática distinguimos, por exemplo, uma sala quadrada de uma sala retangular, logo, o quadrado (na prática) não é retângulo.

Os artistas fazem decorações tomando por base retângulos ou tomando por base quadrados. Para um artista, para um decorador um quadrado não é um retângulo. Passemos, finalmente, ao campo puramente geométrico.

Em Geometria o *quadrado* é um caso particular do retângulo, mas não é propriamente um *retângulo*; assim também o *círculo* é um caso particular da *elipse*, mas não é uma *elipse*.

Vamos supor que um geômetra atribuísse ao círculo a seguinte definição:

***Círculo é uma elipse que tem os dois eixos iguais*.**

Esta definição está certa, do ponto de vista geométrico, mas é inadmissível na prática, isto é, na vida corrente.

Assim como não definimos o *círculo*, tomando como gênero próximo a *elipse*, não podemos definir o quadrado tomando como gênero próximo o retângulo.

O quadrado também é um caso particular do *losango*, mas não é propriamente um losango" (p. 54-55).

De modo geral, os livros didáticos e as outras referências de Matemática não entram de forma tão explícita nessa discussão. Foram identificados nesta pesquisa vários grupos de definições, mas, na maioria dos trabalhos, há algum traço de definições inclusivas, especialmente no que tange aos paralelogramos, cuja classificação atual não parece ter sido afetada pela opinião contrária de Malba Tahan.

Assim, há dois grandes grupos na literatura pesquisada: os que utilizam definições inclusivas de forma irrestrita e os que, embora as utilizem para os paralelogramos, não as reconhecem nos triângulos e outros quadriláteros.

Há vários autores que utilizaram definições exclusivas. ALMEIDA (1955), por exemplo, ensinava:

> **"Em relação aos lados, podem ser: equiláteros quando têm os três lados iguais; isósceles, quando têm só dois lados iguais; escaleno quando têm os três lados desiguais"** (p. 137)
>
> **"Trapézio é o quadrilátero que só tem dois lados paralelos"** (p. 166)

BEZERRA (1977) trabalhava com definições bastante semelhantes, explicitamente exclusivas, apesar de aceitar a inclusão do quadrado entre os retângulos:

> **"Quanto aos lados:**
>
> **Equilátero – três lados congruentes**
>
> **Isósceles – somente dois lados congruentes**
>
> **Escaleno – lados não congruentes"** (p. 60)
>
> **"Trapézio: é o quadrilátero que apresenta somente dois lados paralelos, chamados bases"** (p. 95)

"Quadrado: é o paralelogramo em que os quatro lados e os quatro ângulos são congruentes. É o único quadrilátero regular. É simultaneamente retângulo e losango" (p. 97)

Na mesma linha, QUINTELLA (S/D) também utilizava definições parcialmente inclusivas e parcialmente exclusivas:

"Quanto aos lados os triângulos classificam-se em:
equiláteros, quando têm os 3 lados iguais;
isósceles, quando têm dois lados iguais; o lado desigual é geralmente tomado como base;
escaleno, quando tem os três lados desiguais" (p. 92)

"Trapézio é o que tem dois lados paralelos e só dois
O losango ou rombo, paralelogramo cujos lados são iguais;
O retângulo, cujos ângulos são retos e, portanto, iguais.
O quadrado, cujos lados são iguais e os ângulos são também iguais. É o quadrilátero regular."(p. 126)

"O quadrado tem os lados iguais e os ângulos retos, é, pois, simultaneamente, losango e retângulo" (p. 132)

O principal problema é que há autores que utilizam as definições de forma implícita. Por exemplo, afirmam que os triângulos isósceles possuem dois lados de mesmo comprimento, deixando ao leitor a tarefa de decidir sobre o terceiro lado. Mesmo que a maioria dos matemáticos e dos lógicos entendam que essa é uma definição inclusiva, os alunos que lêem essas definições ainda não aprenderam Lógica e, muito provavelmente, terão dúvidas a respeito do que isso significa: se são "pelo menos dois" ou "exatamente dois".

É o caso de autores como MORGADO (1989), que enuncia, sem qualquer referência ao terceiro lado do triângulo:

"Triângulos (...) Classificações (...) Quanto aos lados (...) Isósceles – dois lados congruentes" (p. 37).

FERNANDES (1975), utiliza definição semelhante à de Morgado, a seguir, embora as ilustrações do livro sugiram que a base dos triângulos isósceles possui comprimento diferente dos demais lados. As relações métricas no triângulo ABC, dado como exemplo, sugerem também uma relação que descreve uma definição inclusiva ($AB \equiv AC$, sem referência a BC):

"Equilátero: tem os três lados congruentes"

"Isósceles: tem dois lados congruentes" (p. 71)

Em SERRÃO (1972), acredita-se, encontra-se uma interessante mistura de definições inclusivas, apresentadas sob formas explícitas ou implícitas. Na época em que o livro foi escrito, entretanto, é improvável que o autor considerasse o retângulo como um tipo de trapézio, o que suscita dúvidas sobre a clareza das definições implícitas, mesmo para os matemáticos.

> **"Triângulo isósceles – quando um triângulo tem dois lados iguais, ele recebe o nome de ISÓSCELES. O vértice comum aos dois lados iguais será denominado, simplesmente, vértice do triângulo isósceles (...) Um triângulo diz-se equilátero quando tem os três lados iguais."** (p. 36)
>
> **"O quadrado é, simultaneamente, retângulo e losango"** (p. 99)
>
> **"Trapézio é o quadrilátero que tem dois lados paralelos"** (p. 119)

Nesse aspecto, a clareza das posições defendidas por TAHAN (1965) favorece ao entendimento inequívoco das definições:

> **Chama-se trapézio o quadrilátero convexo que só tem um par de lados paralelos.** (p. 25)

Em CHAVES, encontra-se um conjunto de definições em que os triângulos são provavelmente classificados pela abordagem inclusiva (implicitamente), os trapézios de forma exclusiva e os paralelogramos de forma inclusiva. O autor procura deixar mais clara a hierarquia de classes usando a notação de conjuntos:

"Os triângulos podem ser: equilátero quando os lados têm a mesma medida; isósceles quando dois lados têm a mesma medida e escaleno quando os três lados têm medidas diferentes" (p. 97)

"Se um quadrilátero tem somente um par de lados opostos paralelos ele se chama trapézio e os lados paralelos são chamados base do trapézio.
(...)
Quadrado: é o paralelogramo que é, ao mesmo tempo, retângulo e losango. Tem todos os ângulos retos e seus lados têm a mesma medida" (p. 141).

"{paralelogramos} $\subset$ {quadriláteros}
{retângulos} $\cap$ {losangos} = {quadrados}
{trapézios} $\not\subset$ {paralelogramos}
{trapézios} $\subset$ {quadriláteros}
{trapezóides} $\not\subset$ {paralelogramos}
{trapézios} $\cap$ {trapezóides} = $\emptyset$" (p. 142)

Essa assimetria de abordagem é encontrada de forma semelhante também em THIRÉ (1960) e DIAS FILHO (1967), com uma diferença sutil no que tange ao quadrado. Seguem as definições de THIRÉ:

"Um triângulo é equilátero quando tem os três lados iguais; é isósceles quando tem dois lados iguais; é escaleno quando os três lados são desiguais". (p. 117)

"**Trapézio é o quadrilátero simples que tem dois lados paralelos e dois lados não paralelos.**" (p. 150)

"**O quadrado, sendo ao mesmo tempo, retângulo e losângulo, as diagonais de um quadrado são iguais e perpendiculares entre si**" (p. 152)

Por sua vez, ensina DIAS FILHO (1967):

"Trapézios são quadriláteros que possuem 2 lados paralelos e 2 lados não paralelos" (p. 69)

"Retângulo é o paralelogramo que tem os ângulos internos retos.

Losango é o paralelogramo que tem os quatro lados respectivamente iguais" (p. 70)

"Quadrado é o paralelogramo que possui os quatro ângulos internos retos e os quatro lados respectivamente iguais" (p. 71)

"O quadrado goza das propriedades relativas ao retângulo, porque, por definição, o quadrado possui os ângulos internos retos; e goza das propriedades relativas ao losango,

> **porque, por definição, o quadrado possui os quatro lados respectivamente iguais"** (p. 74)

Nota-se que, enquanto THIRÉ considera que o quadrado É um retângulo, DIAS FILHO apenas enuncia que o quadrado goza das propriedades do retângulo. A afirmação de THIRÉ ainda parecia ser muito forte na época.

Entretanto, não se deve pensar que a utilização das definições implícitas com valor inclusivo caiu em desuso. PAIVA (1999), por exemplo, define:

> **"Triângulo equilátero (os três lados congruentes entre si)**
> **Triângulo isósceles (dois lados congruentes entre si)**
> **Triângulo escaleno (os três lados com medidas diferentes entre si)"** (p. 23)

Embora sejam ambas implícitas, parece mais seguro afirmar que a definição de PAIVA (1999) é inclusiva do que dizer o mesmo de definições mais antigas, como em FERNANDES (1975), porque a utilização de classes de objetos se consagrou na atualidade, não apenas nas escolas, mas nos livros, nas provas, nos testes de raciocínio.

Dessa forma, quando GIOVANNI (2000) define cone equilátero, como abaixo, não parece razoável que algum aluno ou professor conclua que o cone equilátero não é também um cone circular reto, simplesmente porque a seção meridiana passou de um triângulo isósceles a um triângulo equilátero:

"**No cone circular reto a secção meridiana é um *triângulo isósceles. (...)* Quando a secção meridiana de um cone for um triângulo equilátero, ou seja, g = 2r, então, o cone se diz *equilátero*.**" (p. 313)

Aliás, é no campo das demonstrações de teoremas que mais se torna necessário o uso de definições hierárquicas, como assinala Art Mabbott, de Seattle Schools, colaborador do *site* Mathforum, por e-mail:

"*I think that most of us are moving towards the more inclusive definition for an isosceles triangle = A triangle with at least two congruent sides. That way we can use all of the theorem for isosceles on the equilateral triangles as well. And besides, it just make sense*"

Uma visão mais moderna do ensino de Geometria tenta trazer essas definições e controvérsias para o plano consciente de professores e alunos. LINDQUIST (1994), por exemplo, sugere:

"Um trapézio pode ser definido como *um quadrilátero que tem exatamente um par de lados opostos paralelos* ou *um quadrilátero que tem pelo menos um par de lados opostos paralelos*. Compare essas duas definições e discuta as implicações de cada uma na árvore da família dos quadriláteros" (p. 90)

TINOCO (1999), embora assuma definições inclusivas para o triângulo isósceles, utiliza definições exclusivas para os trapézios. O diferencial é que essa escolha é claramente apresentada ao leitor que, sendo professor, é encorajado a discutir com os alunos a respeito das controvérsias envolvendo as definições:

> **"O item 4c mostra que a igualdade de dois ângulos é condição necessária e suficiente para que o triângulo seja isósceles"** (p. 9)
>
> **"Definições:**
>
> **(i)** **Um *trapézio* é um quadrilátero que tem exatamente um par de dois lados paralelos.**
>
> **(ii)** **Um *paralelogramo* é um quadrilátero que tem os lados paralelos dois a dois**
>
> **(iii)** **Um *retângulo* é um quadrilátero que tem os quatro ângulos iguais**
>
> **(iv)** **Um *losango* é um quadrilátero que tem os quatro lados iguais**
>
> **(v)** **Um *quadrado* é um quadrilátero que tem os quatro lados iguais e os quatro ângulos iguais**

Recomenda-se uma discussão inicial sobre as três questões apresentadas a seguir.

- **De acordo com as definições dadas, pode-se provar que *todo retângulo é um paralelogramo* e que *todo losango é um paralelogramo* (ver exercícios 1 e 2).**
- **Diretamente das definições, observa-se que os *quadrados são losangos e retângulos*. Assim, pelos resultados anteriores, *os quadrados também são paralelogramos*. Estas inclusões precisam ser destacadas, pois, mesmo entre universitários, há quem não cogite isso.**
- **Considerando a definição dada acima para trapézio (definição I), o paralelogramo não é trapézio. Mas há autores que definem trapézio como:**

***um quadrilátero que tem um par de lados paralelos* (definição II)**

De acordo com esta definição, todos os paralelogramos são trapézios, o que altera bastante as relações de inclusão entre os tipos de quadriláteros.

(...)

É oportuno discutir a arbitrariedade das definições. Elas são dadas com certas

intenções, com propósitos bem definidos. O fato de não haver vantagens nem desvantagens claras para adotar uma outra definição de trapézio é que faz com que não haja consenso entre os autores em relação a nenhuma das duas. Ao optar pela primeira, este texto será coerente com ela.

(...)

- **Se uma classe de quadriláteros está contida em outra, seus elementos herdam as propriedades desta outra. Daí, classes "menores" terem mais propriedades"** (p. 61-63).

Segundo a recomendação, portanto, o professor poderá optar pelas definições que considerar as mais adequadas ao contexto, mencionando as divergências existentes. Mais importante, destaca-se que essas definições, sendo nominais, são arbitrárias, não havendo ainda consenso no meio acadêmico sobre a superioridade de uma sobre a outra. Um ambiente bastante fecundo para discussões em sala de aula.

A tendência, ao que parece, é que as definições inclusivas ganhem mais espaço, como assinala Doctor Schwa, do Mathforum, na Internet:

"Definitions are something that we can choose arbitrarily, and books can have different definitions.

> ***However, some definitions are more useful than others, more convenient, easier to use... and in this case, one of those two definition choices is much better than the other*"**

E por que as definições inclusivas seriam melhores que as exclusivas? DE VILLIERS (1994) apresenta um interessante resumo das qualidades das definições hierárquicas:

- **"*it leads to more economical definitions of concepts and formulation of theorems***
- ***it simplifies the deductive systematization and derivation of the properties of more special concepts***
- ***it often provides a useful conceptual schema during problem solving***
- ***it sometimes suggests alternative definitions and new propositions***
- ***it provides a useful global perspective*"** (p. 15)

Como se verá na seção seguinte, essas qualidades das definições hierárquicas são vitais para que o aluno desenvolva suas habilidades em Geometria, o que pode ser verificado segundo a perspectiva definida pelo casal van Hiele.

1.3 O trabalho dos van Hiele

O casal Pierre van Hiele e Dina van Hiele-Geoldof identificou dificuldades de aprendizado em seus alunos do curso secundário na Holanda, elaborando, então, uma teoria em que o nível de desenvolvimento de um aluno de Geometria é resultado da passagem pelos níveis anteriores de compreensão de conceitos, por meio da vivência de atividades adequadas e organizadas pelo professor. Nessa abordagem, o aluno passa sucessivamente pelos seguintes níveis:

0. Reconhecimento ou visualização: a percepção do espaço se dá somente no nível das entidades globais. As figuras geométricas são reconhecidas pela forma e não por suas partes ou propriedades. Um aluno nesse estágio poderia, por exemplo, desenhar quadrados e retângulos, mas não seria capaz de observar que essas figuras têm ângulos retos e que os lados opostos são paralelos;

1. Análise: neste nível o aluno começa a discernir características das figuras que permitam a generalização de conceitos, como o de um retângulo. Mas ainda não é capaz de explicar relações entre propriedades e não percebe relações entre as diferentes figuras;

2. Abstração ou dedução informal: aqui o aluno já é capaz de estabelecer relações entre propriedades de uma mesma figura ou de figuras diferentes. Por exemplo, pode concluir que, num quadrilátero, se os lados opostos são paralelos, os ângulos opostos são necessariamente congruentes, ou que um quadrado é um retângulo porque tem todas as propriedades de um retângulo. O aluno deste nível é capaz de acompanhar demonstrações, mas não de alterar sua ordem lógica ou de construir provas a partir de premissas diferentes;

3. Dedução ou dedução formal: o aluno entende a dedução como uma ferramenta para construir a teoria geométrica em um sistema axiomático, sendo capaz de elaborar suas próprias demonstrações e não apenas reter aquelas apresentadas pelo professor;

4. Rigor: a Geometria passa a ser percebida pelo aluno no plano abstrato, sendo possível o desenvolvimento em vários sistemas axiomáticos, como em geometrias não euclidianas, que podem ser comparados.

Com base nas características apresentadas para os diversos níveis, observa-se que, nesta monografia, o principal aspecto abordado situa-se na distinção entre os níveis 1 e 2 do modelo, bem como nas perspectivas de desenvolvimento do aluno em função do tipo de definição que utiliza.

Um aluno do primeiro desses níveis é incapaz de perceber a inclusão de classes. Não é concebível ao aluno, por exemplo, a noção de que um quadrado é um retângulo, que é um paralelogramo, que é um quadrilátero. No nível 2, entretanto, essa percepção é fundamental.

Dessa forma, LINDQUIST (1994) apresenta diversas atividades indicadas para o ensino de Geometria a alunos nos níveis 1 e 2, entre as quais:

Nível 1 (p. 10-12)	**Nível 2** (p. 12-14)
Descrever uma classe de figuras por suas propriedades	Estudar as relações desenvolvidas no nível 1, buscando inclusões e implicações
Comparar figuras segundo suas propriedades características Descobrir propriedades de classes de objetos não familiares	Identificar conjuntos mínimos de propriedades para descrever uma figura

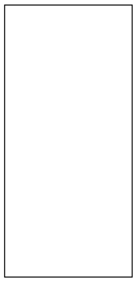
Identificar e desenhar uma figura, dada uma descrição oral ou escrita de suas propriedades. Identificar uma figura a partir de pistas visuais Deduzir, a partir de muitos exemplos, regras e generalizações.	Desenvolver e usar definições
Resolver problemas geométricos que requeiram o conhecimento das propriedades das figuras, relações ou abordagens perspicazes.	Resolver problemas em que as propriedades das figuras e as inter-relações são importantes

Nota-se que, a partir de atributos isolados, o aluno vai desenvolvendo cada vez mais a sua capacidade de generalização, condição indispensável para atingir os níveis mais elevados do modelo.

NASSER assinala a característica distintiva do terceiro nível (o de número 2), quando o aluno consegue categorizar objetos:

> **"Neste nível, o aluno reconhece as figuras geométricas por meio de suas propriedades, e as relaciona, sendo, portanto, capaz de estabelecer inclusões de classes de objetos geométricos. As atividades constantes do capítulo II visam ajudar os aluno a atingir este nível"** (p. 6).

Um ponto importante ressaltado por LINDQUIST (1994) é que a justificativa para uma resposta a uma questão geométrica, mais do que a resposta em si, é essencial para determinar o nível em que um aluno se encontra. Por exemplo, a pergunta "Que tipo de figura é esta?" poderá ser respondida com "retângulo" por alunos em todos os níveis, caso se apresente a figura abaixo.



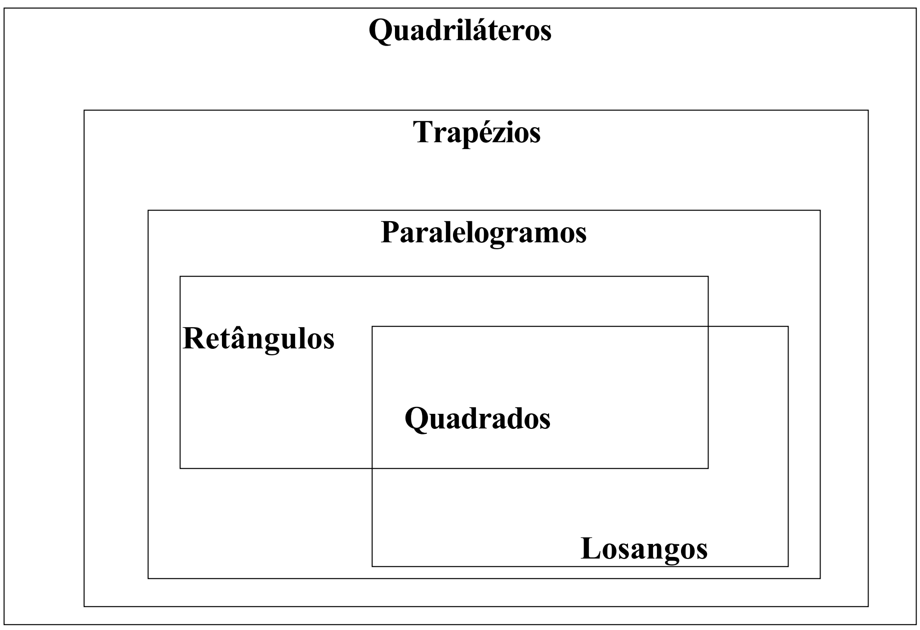
Todavia, as justificativas variam conforme o nível em que o aluno se encontra:

Nível	**Justificativa**
0	"Parece um retângulo!" ou "Porque parece uma porta" (a resposta baseia-se no modelo visual)
1	"Quatro lados, fechado, dois lados compridos, dois lados curtos, lados opostos paralelos, quatro ângulos retos..." (relacionam-se propriedades; não se observam redundâncias)
2	"É um paralelogramo com quatro ângulos retos". (O aluno procura dar um número mínimo de propriedades. Se indagado, indicaria que sabe que é redundante, neste exemplo, dizer que os lados opostos são congruentes)

3	"Isso pode ser provado se eu sei que a figura é um paralelogramo e que um dos ângulos internos é reto" (O aluno procura demonstrar o fato dedutivamente)

É importante destacar o papel decisivo que a compreensão das definições inclusivas tem no aprendizado de Geometria e na progressão nos níveis de van Hiele, especialmente até o nível 2.

LOPES, por exemplo, aponta como conseqüência natural de uma das atividades do aprendizado de Geometria, dependendo do nível da turma, a conclusão de que alguns tipos de quadriláteros têm propriedades em comum e a elaboração de diagramas como o abaixo:



Em outra atividade, de construção de figuras planas, LOPES se utiliza extensivamente de definições inclusivas:

> ***"O professor poderá fazer perguntas do tipo***
>
> ***a) É possível deformar o quadrado?***
>
> ***b) O que fica formado? Qual o nome desta figura que parece um balãozinho?***
>
> ***c) Então, podemos afirmar que todo quadrado é um losango?***
>
> ***d) Todo losango é um quadrado?***
>
> ***e) O que é preciso para que um quadrilátero seja um retângulo?***
>
> ***f) Todo quadrado é um retângulo? E todo retângulo é um quadrado?"*** (p. 42)

Mais do que serem utilizadas, nota-se que as definições inclusivas são parte inseparável da aplicação da teoria de van Hiele ao ensino, sem a qual não seria possível sequer descrever a progressão entre os níveis 1 e 2.

1.4 O problema da lógica

Apesar de todos os problemas mencionados nas seções anteriores a respeito das definições matemáticas, a perfeição do arcabouço geométrico euclidiano maravilhou as pessoas ao longo dos séculos, inclusive os gênios, como DESCARTES (2003), que afirmou:

> "**Permaneci sempre firme na resolução de não supor nenhum outro princípio que não fosse o de que me servi para demonstrar a existência de Deus e da alma, bem como na de não aceitar como verdadeiro nada que não me**

parecesse tão claro e tão certo como me pareciam antes as demonstrações dos geômetras" (p.47)

Boa parte dessa presunção de perfeição deve-se, sem dúvida, à consistência lógica rigorosa dos enunciados, ao menos para a época em que se produziu. Desnecessário tentar descrever a relação existente entre a Matemática e a Lógica. TAHAN (1966), citando o astrônomo francês Dominique François Arago, definiu:

"**A Matemática é a Lógica em ação**" (p. 3)

Como se pode inferir da leitura da seção anterior, a progressão para os níveis de van Hiele pressupõe, mais que conhecimentos geométricos, um alto grau de raciocínio dedutivo.

As definições hierárquicas, novamente, favorecem ao desenvolvimento e às demonstrações usando a lógica dedutiva. FETISSON (1994), por exemplo, utiliza-se delas:

"... o raciocínio dedutivo consiste na aplicação de uma certa lei geral a um caso particular determinado.

(...)

1) Em todo retângulo, as diagonais são congruentes entre si;

2) Todo quadrado é um retângulo;

3) Dedução: em todo quadrado as diagonais são congruentes entre si." (p. 30)

A situação atual vivenciada na Uerj, bem como a descrita em TINOCO (1999) aponta de forma inequívoca a grave situação em que se encontram os alunos egressos do 2º grau em relação à lógica:

> ***"Os alunos chegam à Universidade com o raciocínio lógico-dedutivo pouco (ou nada) desenvolvido e com pouca (ou nenhuma) familiaridade com o método axiomático, o que os leva ao fracasso em várias disciplinas do Curso de Matemática"*** *(p. 1)*

O diagnóstico de LINDQUIST (1994) é, em essência, semelhante àquele:

> **"a maioria das dificuldades que se observam nos alunos em sala de aula está relacionada com a maneira de organizarem o raciocínio e construírem argumentações lógicas"** (p. 59)

Dentro dessa problemática, a questão da linguagem é freqüentemente colocada em segundo plano, embora a compreensão dos conceitos de Matemática e de Lógica passem, necessariamente, pela superação das ambigüidades relativas à linguagem. Em LINDQUIST (1994), encontra-se:

> **"A atividade de adivinhar figuras estimula as crianças a usar a linguagem com precisão (por exemplo, a diferença entre *pelo menos três lados* e *três lados*).** (p. 81)

Ora, se há diferença entre "pelo menos três lados" e "três lados", também deve haver diferença entre "pelo menos dois lados" e "dois lados" e "exatamente dois lados", mesmo para um lógico ou matemático, e os professores em geral insistem em dizer que os triângulos isósceles possuem "dois lados" ou "pelo menos dois lados" congruentes, imaginando que o aluno vai entender a equivalência dos significados.

O uso indiscriminado de ambigüidades de linguagem, mesmo quando pacificadas entre os profissionais da Matemática, condena o aluno a uma sensação de incompetência, que não beneficia o aprendizado.

Esse problema, envolvendo a Lógica e a linguagem, é adequadamente tratado por SALMON (1993):

> "**Como a linguagem é um instrumento extremamente complexo, há possibilidades de erro decorrentes do próprio uso da linguagem**" (p. 73).

Novamente, essas questões sugerem que a opção explícita por uma abordagem de definições, como a do tipo inclusiva, pode vir a facilitar o desenvolvimento do raciocínio lógico dedutiva dos alunos, de modo que eles atinjam os níveis mais elevados de van Hiele e compreendam os conceitos inerentes à hierarquia de classes.

Nesta seção, foi descrita a controvérsia entre as definições ditas hierárquicas e as particionadas, havendo, na literatura consultada, predominância da utilização atual das primeiras, tendo como um dos objetivos desejáveis que os estudantes concluíssem o ensino médio com uma capacidade de generalização adequada.

A contextualização teórica não evidenciou, entretanto, como essas definições e seus detalhes implícitos ou explícitos estão sendo absorvidos pelos alunos.

Sem que os conceitos de hierarquia de classes tenham sido plenamente absorvidos, o aluno pode simplesmente decorar que “todo quadrado é um retângulo”, assim como várias outras relações são memorizadas em Matemática, sem que tenham sido compreendidos.

Para melhor estimar essas deficiências de natureza conceitual e lógica, este trabalho conta também com um estudo de caso, descrito na seção a seguir.

PESQUISA

Este trabalho se originou da necessidade de responder, inicialmente, a uma singela questão de cunho conceitual, tendo em vista divergências ocorridas no decorrer da disciplina Introdução à Lógica, na Uerj, durante o primeiro semestre letivo de 2003: “Qual é a definição correta do conceito triângulo isósceles?”.

Durante a pesquisa, foi constatado que essa pergunta era parte de uma discussão bem mais ampla no meio acadêmico, referente à controvérsia entre o uso das definições hierárquicas ou particionadas.

Como conseqüência, a pergunta deste trabalho passou a ser: “**Que tipo de definições são mais adequadas ao desenvolvimento do aluno nos níveis de van Hiele, as hierárquicas ou as particionadas**?”.

Procurou-se também diagnosticar a situação em que se encontram licenciandos da Uerj e alunos dos colégios Pedro II e Cefet-RJ, a respeito de conceitos básicos em Geometria e Lógica, a partir de um estudo de caso, tomando como referência os níveis de van Hiele.

Pretendia-se, assim, verificar:

1. Em que estágio de van Hiele se encontram os alunos do ensino médio e da Licenciatura em Matemática entrevistados?
2. Esses alunos estão aplicando definições geométricas inclusivas ou exclusivas?
3. Há deficiências de natureza lógica nas respostas desses alunos?

A metodologia empregada é do estudo de casos, sedimentada na pesquisa documental, na qual podem-se relacionar os tipos de definições atualmente aceitas para os entes geométricos, cotejando esse resultado com a visão dos alunos e futuros profissionais de ensino de Matemática.

Para obtenção dos dados necessários à estruturação do trabalho, realizaram-se entrevistas por telefone ou por correio eletrônico com profissionais de ensino no Brasil e no exterior, de modo a determinar, com precisão, que abordagens conceituais estavam em discussão.

Paralelamente, foram coletadas informações de grupos de alunos de Licenciatura e do Ensino Médio, de modo a determinar que definições estão em uso correntemente, com o uso da técnica do Estudo de Caso. Não se espera, portanto, que os resultados possam ser generalizados para o universo de alunos da Cidade ou, mesmo, para as instituições pesquisadas.

Esta pesquisa implicou a aplicação de questionários durante os meses de outubro a dezembro de 2003, a alunos do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Rio de Janeiro, bem como a alunos do Centro Federal de

Educação Tecnológica do Rio de Janeiro (Cefet-RJ) e do Colégio Pedro II (unidade Engenho Novo).

Foram respondidos 46 questionários de alunos da Licenciatura e 140 questionários de alunos do ensino médio. Os itens dos questionários aplicados encontram-se nas seções seguintes e as respostas individuais estão nos Anexos.

A análise do material produzido encontra-se nas seções seguintes, sendo avaliados, para cada tipo de questionário, o tipo de definição adotado pelos entrevistados, as inconsistências lógicas e o provável nível de van Hiele em que se encontram.

1. ALUNOS DA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DA UERJ:

Os alunos da Licenciatura responderam a 10 questões do tipo “Concordo” / “Discordo” e a uma questão solicitando o principal fator que fundamentou as outras 10 respostas, conforme abaixo:

Caro colega,

Esta pesquisa tem por objetivo colher elementos para subsidiar trabalho de conclusao de curso de Licenciatura Plena em Matematica da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Caso queira participar, avalie as afirmacoes seguintes e retorne este formulario. Responda a todos os itens, mesmo que as ideias sejam semelhantes. Nao e necessario identificacao.

Seq.	Afirmação	Concordo	Discordo
01	Todo triângulo isósceles é equilátero		
02	Todo triângulo equilátero é isósceles		
03	Alguns triângulos isósceles são equiláteros		
04	Alguns triângulos equiláteros são isósceles		
05	Nenhum triângulo isósceles é equilátero		
06	Nenhum triângulo equilátero é isósceles		

07	Isósceles e equiláteros constituem conjuntos disjuntos de triângulos		
08	Um triângulo equilátero pode ser também isósceles		
09	Um triângulo qualquer pode ser também isósceles		
10	Um triângulo escaleno pode ser também isósceles		

Qual o principal fator que motivou suas respostas? (marque apenas um com um X):

Adequação didática	
Conceito predominante na literatura	
Conclusão Lógica	
Convicção pessoal	
Outro (especifique):	

A tabulação dessas respostas apresentadas permite construir a seguinte lista de definições, seguidas do percentual majoritário que a elegeu, sendo a tabela classificada por ordem decrescente desta última coluna.

Seq.	Afirmação	Questionários
01	Não é verdade que todo triângulo isósceles é eqüilátero	100%
10	Não é verdade que um triângulo escaleno pode ser também isósceles	93%
02	Todo triângulo eqüilátero é isósceles	86%
07	Não é verdade que isósceles e eqüiláteros constituem conjuntos disjuntos de triângulos	84%
06	Não é verdade que nenhum triângulo eqüilátero é isósceles	82%
09	Um triângulo qualquer pode ser também isósceles	76%
08	Um triângulo eqüilátero pode ser também isósceles	63%
04	Não é verdade que alguns triângulos eqüiláteros são isósceles	56%
05	Não é verdade que nenhum triângulo isósceles é eqüilátero	54%
03	Não é verdade que alguns triângulos isósceles são eqüiláteros	52%

1.1 Tipo de definição adotada.

As respostas às questões 02, 07 e 06 sugerem que mais de 80% dos alunos da Licenciatura utilizam definições inclusivas para os triângulos isósceles e eqüiláteros.

1.2 Inconsistências lógicas nas respostas

Algumas respostas apresentadas pelos alunos da Licenciatura evidenciaram, em conjunto, problemas de natureza lógica:

. **Questões 3 e 4**: Cerca de 30% dos entrevistados responderam simultaneamente que há triângulos isósceles que são eqüiláteros, mas não há triângulos eqüiláteros que são isósceles. Além disso, 26% responderam o contrário, isto é, que há triângulos isósceles que são eqüiláteros, mas não há triângulos eqüiláteros que são isósceles.

Uma das possíveis explicações para essa inconsistência está em ambigüidade na palavra "alguns". Dependendo do contexto em que se apresente, o aluno pode entendê-la como "pelo menos um", "mais de um" ou "mais de um, mas não todos", significados que podem gerar dúvidas nas respostas.

Em se tratando de alunos de Matemática, entretanto, a alegação não se sustenta, pela contradição inerente ao conjunto de respostas. Os 30% mencionados no primeiro grupo, por exemplo, responderam também negativamente à questão 7, evidenciando que reconhecem que os conjuntos de triângulos eqüiláteros e isósceles possuem interseção.

Dessa forma, é inadmissível que se coloque que não há triângulos eqüiláteros isósceles, uma vendo se tendo admitido que há isósceles que são eqüiláteros. Mesmo a simples recordação das noções básicas de conjuntos permitiria concluir que, se $A \cap B \neq \emptyset$, não é possível que $B \cap A$ seja vazio.

. **Questões 2 e 6**: Essas questões são logicamente incompatíveis, uma vez que não é possível, ao mesmo tempo, que todos os eqüiláteros sejam isósceles e nenhum eqüilátero seja isósceles. Apesar disso, 8% dos alunos responderam afirmativamente às 2 sentenças.

. **Questões 7 e 8**: Admitindo-se falsa a afirmação 7, ou seja, concluindo-se que há interseção entre os conjuntos dos triângulos eqüiláteros e isósceles, não é possível negar logicamente a afirmação 8, de que um triângulo eqüilátero pode ser também isósceles. Apesar disso, 21% dos alunos responderam negativamente às duas afirmações.

Novamente, a linguagem pode assumir uma parcela do ônus por esta última discrepância lógica. O verbo “poder” admite uma certa dose de ambigüidade, a que os matemáticos costumam ser imunes, mas que contamina a lógica dos estudantes em geral: além do significado esperado “ser possível”, em alguns contextos é entendido como “ter a faculdade de”. Ora, admitindo a definição inclusiva, não existe a faculdade para o triângulo equilátero ser isósceles, já que isso pressuporia que, eventualmente, ele também não o fosse, quando a inclusão é obrigatória.

Um dos alunos, em entrevista, citou uma antiga questão de concurso, que pedia para avaliar a proposição Física: “um ímã normalmente tem dois pólos”. Como, pelas leis físicas, um ímã sempre tem dois pólos (e não apenas normalmente), a banca examinadora exigiu que a proposição fosse considerada falsa, o que dificilmente seria aceito por um matemático.

. **Questões 3 e 5**: essas afirmações são contraditórias, o que não impediu que 8% dos alunos respondessem que concordavam com as duas. É de se admirar que, mesmo no senso comum, não parece fazer sentido dizer que há triângulos isósceles eqüiláteros e não há triângulos isósceles eqüiláteros.

As observações realizadas sugerem, da parte dos licenciandos, falta de familiaridade com sentenças lógicas na área da Geometria ou uma grande dose de distração ao responder às questões. Apesar disso, 60% dos entrevistados afirmou que suas respostas fundamentaram-se principalmente em uma conclusão lógica.

1.3 Nível de van Hiele

Considerando que, para este trabalho, apenas os níveis de van Hiele 1 e 2 são de interesse, observa-se que a maioria dos alunos pesquisados reconheceu a existência de uma hierarquia de classes entre os triângulos, o que sugere a classificação dos licenciandos, pelo menos, no nível 2.

A hesitação e os conflitos entre as respostas para premissas quase idênticas, entretanto, levanta dúvidas quanto à compreensão real do que seja uma hierarquia de objetos, além de sérias questões a respeito do desenvolvimento lógico-dedutivo.

2. ALUNOS DO ENSINO MÉDIO:

Os alunos do Cefet-RJ e do Pedro II responderam apenas a 10 questões do tipo “Concordo” / “Discordo”. Para esses pesquisados, foi apresentado o seguinte questionário:

Caro estudante,

Esta pesquisa tem por objetivo colher elementos para subsidiar trabalho de conclusao de curso de Licenciatura Plena em Matematica da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Caso queira participar, avalie as afirmacoes seguintes e retorne este formulario. Responda a todos os itens, mesmo que as ideias sejam semelhantes. Nao e necessario identificacao.

Seq.	Afirmação	Concordo	Discordo
01	Todo quadrado é um retângulo		
02	Todo retângulo é um quadrado		
03	Nenhum quadrado é retângulo		
04	Alguns retângulos são quadrados		
05	Todo triângulo isósceles é equilátero		
06	Todo triângulo equilátero é isósceles		
07	Nenhum triângulo equilátero é isósceles		
08	Alguns triângulos isósceles são equiláteros		
09	Um triângulo qualquer pode ser também isósceles		
10	Um triângulo escaleno pode ser também isósceles		

Sendo ambos os colégios considerados de bom nível na cidade do Rio de Janeiro, estima-se que a qualidade das respostas, sob o prisma lógico ou conceitual, sejam iguais ou superiores à média dos alunos de séries equivalentes de outras escolas.

As respostas apresentadas permitem construir a seguinte lista de definições, seguidas do percentual majoritário que a elegeu, sendo a tabela classificada por ordem decrescente desta última coluna.

Seq.	Afirmação	Questionários
02	Não é verdade que todo retângulo é um quadrado	93%
05	Não é verdade que todo triângulo isósceles é eqüilátero	91%
09	Um triângulo qualquer pode ser também isósceles	82%
10	Não é verdade que um triângulo escaleno pode ser também isósceles	76%
08	Não é verdade que alguns triângulos isósceles são eqüiláteros	69%
03	Não é verdade que nenhum quadrado é retângulo	65%
01	Todo quadrado é um retângulo	62%
07	Não é verdade que nenhum triângulo eqüilátero é isósceles	55%
04	Alguns retângulos são quadrados	54%
06	Não é verdade que todo triângulo eqüilátero é isósceles	52%

2.1 Tipo de definição adotada.

Essas respostas delinearam estudantes divididos em suas definições.

Em relação ao quadrado, por exemplo, apenas 62% reconhecem a definição inclusiva, de acordo com a questão 1, ou menos ainda, se for levada em consideração a questão 4 (54%).

Para a classe dos triângulos, a conjugação das respostas às questões 6 e 7 sugerem que os alunos não reconhecem propriamente uma relação de inclusão entre os triângulos equiláteros e isósceles, mas apenas a proximidade dos conceitos. Durante a aplicação dos questionários, alguns alunos chegaram a demonstrar que não lembravam o que significa o termo “isósceles”, embora não houvessem esquecido de “equilátero”.

Cerca de 26% dos alunos responderam categoricamente que “Nenhum quadrado é retângulo” e “Nenhum triângulo equilátero é isósceles”.

O resultado do questionário, portanto, é inconclusivo quanto à definição adotada, embora seja possível observar que, de modo geral, os alunos já tiveram algum contato com uma definição inclusiva, mesmo que de modo incompleto, como sugerem as respostas à questão 3. Apesar disso, apenas 31% responderam afirmativamente às questões 1, 6 e 9, simultaneamente.

2.2 Inconsistências lógicas nas respostas

Dado o elevado percentual de alunos com desconhecimento de hierarquia de objetos, os problemas mais marcantes se deram no nível de definição.

Problemas ocorridos entre os licenciandos, entretanto, também ocorreram entre os estudantes de nível médio. As questões 7 e 8, por exemplo, deram margem a erro para 27% dos alunos: eles discordam da proposição “Nenhum triângulo equilátero é isósceles”. Logo, admitem que há triângulos equiláteros que são também isósceles, mas, na questão seguinte, discordam da proposição “Alguns triângulos isósceles são equiláteros”, proposição que é conseqüência inevitável da conclusão anterior.

Cerca de 15% dos alunos responderam que “Todo quadrado é um retângulo”, mas negaram que “Alguns retângulos são quadrados”. Paralelamente, 25% concordam que “Todo triângulo equilátero é isósceles”, mas não reconhecem que “Alguns triângulos isósceles são equiláteros”.

2.3 Nível de van Hiele

Apenas cerca de metade dos alunos demonstrou reconhecer hierarquia de classes entre figuras, mesmo no caso do quadrado e do retângulo, que são amplamente aceitas, mesmo em livros mais antigos.

Como o questionário não se destina especificamente a verificar o nível de van Hiele, mas observar o raciocínio lógico e a utilização de definições inclusivas, pode-se apenas indicar que vários alunos parecem se situar ainda no nível 1 van Hiele, isto é, ainda não reconhecem conceitos de hierarquia de classes de figuras geométricas.

Conclui-se, assim, que há maior reconhecimento das definições hierárquicas por parte dos licenciandos de Matemática, aliado, porém, a um certo grau de deficiências de natureza lógica. No lado dos alunos do ensino médio, o conhecimento dessas definições é menos marcante, o que pode ser explicado, talvez, pela maior especialização em Matemática dos alunos da Licenciatura. Em ambos os casos, porém, verificou-se que a compreensão adequada de hierarquia de classes, que depende intensamente do raciocínio dedutivo, não alcançou a maturidade plena.

CONCLUSÃO

O objetivo principal deste trabalho foi descrever duas abordagens existentes para definição de conceitos em Geometria, bem como possíveis conseqüências para o aprendizado da disciplina e o desenvolvimento lógico dos alunos, necessário em estudos mais avançados e na atividade profissional contemporânea.

A preocupação original que motivou o trabalho foi a controvérsia na definição do triângulo isósceles, que parece estar quase solucionada na atualidade, como sugere a resposta do Professor Elon Lages Lima, do IMPA, por e-mail:

> **"Triângulo isósceles é aquele que possui dois lados de mesmo comprimento. É preciso aprender (e insistir) que isto não diz nada sobre o terceiro lado, o qual pode ter comprimento igual aos outros lados, ou não. Noutras palavras, um triângulo equilátero é isósceles, sim".**

A respeito das controvérsias verificadas, causou estranheza, à primeira vista, que uma disciplina tão importante e tão "exata" quanto a Matemática não tenha um comitê internacional ou alguma entidade que normatize essas definições. Dessa forma, o que se pôde verificar é que há uma forte tendência de predominância das definições hierárquicas, mas, além disso, há recomendação de que as divergências sejam explicitadas e utilizadas como matéria-prima para as aulas, que se tornam menos dogmáticas.

Procurou-se também diagnosticar a situação em que se encontram licenciandos da Uerj e alunos dos colégios Pedro II e Cefet-RJ, a respeito de conceitos básicos em Geometria e Lógica, a partir de um estudo de caso, tomando como referência a teoria dos van Hiele.

Assim, o estudo de caso sugeriu que uma parcela de alunos do nível médio e, mesmo, da Licenciatura em Matemática, podem não ter atingido plenamente o nível 2 de van Hiele, em que é capaz de reconhecer hierarquia de classes de objetos, e não apenas atributos isolados.

Observou-se que a maioria dos alunos está utilizando definições predominantemente inclusivas, embora o percentual majoritário seja bem menos expressivo entre os alunos do ensino médio do que entre os licenciandos.

Apesar de o resultado anterior estar de acordo com o que se esperava, a partir da literatura consultada, as inconsistências de natureza lógica encontrada levam a crer que os alunos estão, quando muito, memorizando definições inclusivas, e não compreendendo efetivamente essas definições.

É facilmente perceptível o impacto que uma definição exclusiva, ou mesmo uma definição inclusiva mal compreendida, pode ter no processo de generalização de conceitos e resolução de problemas. Se, por exemplo, o quadrado não for considerado uma espécie do gênero retângulo, todas as propriedades demonstradas para o retângulo teriam que ser novamente provadas para os quadrados.

Apesar das inúmeras vantagens das definições inclusivas, a Literatura existente não tem demonstrado preocupação em enfatizar a necessidade de generalização de conceitos.

O principal problema encontrado é que definições são apresentadas com atributos implícitos, sem que o aluno tenha feito um curso de Lógica ou tenha recebido noções preliminares sobre objetos e generalização. O resultado é um baixo nível de compreensão do aluno e um sentimento de incompetência para o entendimento dos conceitos apresentados, que poderiam ser minimizados com a explicitação das questões de divergência na Matemática, eliminando a aura de perfeição e dogmatismo de que essa disciplina goza entre os alunos.

A discussão é salutar, e participar da construção dos objetos que vai utilizar no aprendizado de Geometria (as “regras do jogo”), qualquer que seja a definição adotada, certamente irá despertar maior interesse dos alunos do que a simples memorização de conceitos prontos.

BIBLIOGRAFIA

ALMEIDA, Lauro Pastor: Curso de Matemática – ciclo ginasial – 3ª série. Rio de Janeiro: Conquista, 1955.

ARANHA, Maria Lúcia de Arruda: Filosofando: Introdução à Filosofia. São Paulo: Moderna, 2003.

BEZERRA, Manoel Jairo, SCHWARZ, Otto, BEZERRA, Roberto Zaremba: Geometria 1. Rio de Janeiro: Fename, 1977.

CASTRO, Cláudio de Moura: A Prática da Pesquisa. São Paulo: McGraw-Hill, 1977.

CHAVES, J. G.: Ensino Moderno de Matemática – 7ª série, 9ª edição. São Paulo: Editora do Brasil, S/D.

DEMO, Pedro: Introdução à Metodologia da Ciência. São Paulo: Editora Atlas, 1985.

DESCARTES, René: Discurso do Método – Regras para a Direção do Espírito. São Paulo: Editora Martin Claret, 2003.

DE VILLIERS, M. D: The role and function of a hierarchical classification of the quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, 1994.

DIAS FILHO, Vasco Fernandes, MELLO, Paulo Freire: Apontamentos de Geometria Plana. São Paulo: Editora Ática, 1967.

DOUBNOV, I: Erros nas Demonstrações Geométricas. São Paulo: Atual, 1996.

FERNANDES, Ary *et al:* Matemática 7, para a 7ª Série do 1º Grau. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1975.

FETISSON, A. I.: A Demonstração em Geometria. São Paulo: Atual, 1994.

GIOVANNI, José Ruy: Matemática: uma nova abordagem, vol. 2. São Paulo: FTD, 2000.

LAKATOS, Imre. A Lógica do Descobrimento Matemático – Provas e Refutações. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1978.

LINDQUIST, Mary Montgomery, SHULTE, Albert P. Aprendendo e Ensinando Geometria. São Paulo: Atual, 1994.

LOPES, M. Laura, NASSER, Lilian. Geometria na Era da Imagem e do Movimento. Rio de Janeiro: UFRJ/IM/Projeto Fundão, 1996.

MARQUES, Wilson Lisboa *et al*. Matemática 7ª série 1º grau – Caderno de Exercícios. Belo Horizonte: Livraria Lê Editora Ltda, 1977.

MORGADO, A. C., WAGNER, E., JORGE, M. Geometria I. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves Editora, 1989.

NASSER, Lilian, SANT'ANNA, Neide. Geometria segundo a Teoria de Van Hiele. Rio de Janeiro: UFRJ/IM/Projeto Fundão, 2000.

PAIVA, Manoel. Coleção base: Matemática, vol. único, 1ª edição. São Paulo: Moderna, 1999.

POLYA, G. A Arte de Resolver Problemas. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

QUINTELLA, Ary. Matemática para a 3ª Série Ginasial, 66ª edição. São Paulo: Companhia Editora Nacional SP, S/D.

ROXO, Euclides *et al*. Curso de Matemática – 3º ano, 2ª edição. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1935.

SALMON, Wesley. Lógica. Rio de Janeiro: Prentice-Hall, 1993.

SERRÃO, Alberto Nunes. Exercícios e Problemas de Geometria no Plano. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1972.

TAHAN, Malba. A lógica na Matemática. São Paulo: Saraiva, 1966.

TAHAN, Malba. O Problema das Definições em Matemática – erros, dúvidas e curiosidades. São Paulo: Saraiva, 1965.

THIRÉ, Cecil. Manual de Matemática – 3ª série ginasial, 30ª edição. São Paulo: Livraria Francisco Alves, 1960.

TINOCO, Lucia. Geometria Euclidiana por Meio da Resolução de Problemas. Rio de Janeiro: UFRJ/IM/Projeto Fundão, 1999.

VINNER, S. The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In Tall, D. (Ed). *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer, 1991.

ANEXOS