UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS A

OTÍLIO AL-SAMIR SOARES RIBEIRO

EXPLORANDO O ESPAÇO DE PARÂMETROS

BELO HORIZONTE-MG

2015

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÂO

Neste projeto, será investigado como muda o comportamento da família de sistemas

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by \\ \dfrac{dy}{dt} = cx \end{cases}$$

quando os parâmetros a, bec mudam.

O objetivo é produzir uma representação do espaço abc, indicando as regiões onde este sistema tem diferentes retratos de fase.

Serão realizadas as seguintes atividades:

1)Primeiro considere $a = 0$. Calcule os autovalores e determine os valores de b e c exatos onde este sistema terá diferentes retratos de fase. Faça uma representação gráfica do plano bc, indicando estas diferentes regiões. Represente todos os tipos de sistemas que aparecem. Indique também onde ocorre situações com autovalores nulos ou repetidos.

2)Repita a primeira parte para $a = 1$

3)Descreva o comportamento do sistema para $0 < a < 1$.

4)Repita a primeira parte para $a = -1$

5)Faça uma representação tridimensional com os valores de a no eixo vertical e com o plano bc perpendicular a este eixo. Destaque os casos onde o sistema muda de comportamento.

2 METODOLOGIA

2.1 A INFLUÊNCIA DOS AUTOVALORES NO RETRATO DE FASE

Antes de estudar o sistema proposto no projeto, vejamos algumas considerações sobre o sistema de equações diferenciais lineares homogêneas de primeira ordem com coeficientes constantes da forma

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases}$$

que pode ser escrito na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

onde$x' = \frac{dx}{dt}$ e $y' = \frac{dy}{dt}$. Em notação vetorial, o sistema acima toma a forma

$$X' = AX \qquad (1.1)$$

onde

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{e} A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Consideramos o que sabemos sobre equações lineares de primeira ordem, para resolver o sistema acima, buscamos soluções da forma

$$x = x(t) = ve^{\lambda t}$$

Derivando a função $x(t)$ e substituindo-a em (1.1), obtemos

$$(A - \lambda I)v = 0$$

Logo, λ deve ser um autovalor e v um autovetor, da matriz A. Assim, as soluções de um sistema linear dependem diretamente dos autovalores e autovetores da matriz A que as determinam. Os autovalores são obtidos através do polinômio característico, dado por

$$\begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

Uma solução do sistema de equações pode ser considerada como uma representação paramétrica de uma curva no plano. Podemos olhar para essa curva como uma trajetória percorrida por uma partícula em movimento, cuja velocidade x' é especificada pela equação diferencial. O plano xyé chamado de plano de fase e um conjunto representativo de trajetórias é chamado de retrato de fase. Assim, ao analisar o sistema linear acima, precisamos considerar diversos casos(que irão depender dos autovalores da matriz A.

Como o comportamento das soluções depende fundamentalmente da natureza dos autovalores, analisaremos os diferentes casos baseados nos possíveis tipos de autovalores.

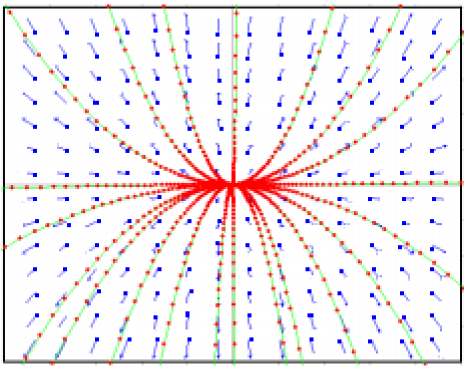
2.1.1 AUTOVALORES REAIS E DISTINTOS DE MESMO SINAL

Neste caso, a solução geral do sistema é dada por

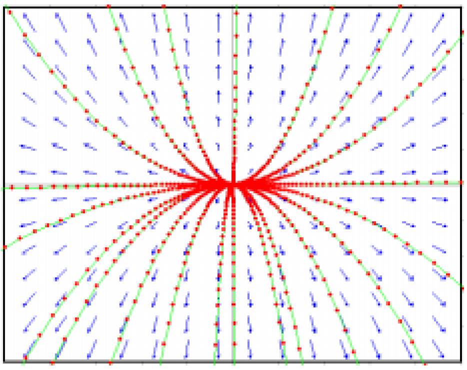
$$x(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t}$$

ondeλ_1 e λ_2 são autovalores da matriz A, com autovetores v_1 e v_2, respectivamente.

Se λ_1 e λ_2 são ambos negativos, então $x(t) \to 0$quando $t \to \infty$, e aorigem é chamada de nó atrator.



Se λ_1 e λ_2 são ambos positivos, então então$x(t) \to \infty$, quando $t \to \infty$, e a origem é chamada de nó repulsor.

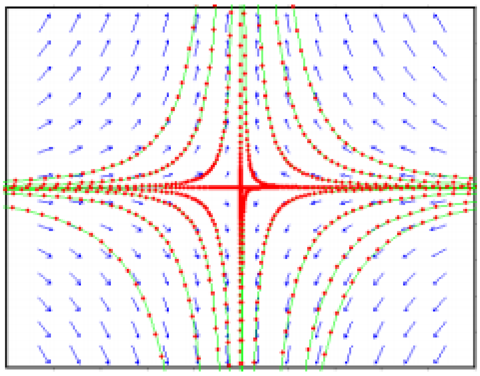


2.1.2 AUTOVALORES REAIS COM SINAIS OPOSTOS

Neste caso, a solução geral do sistema também é dada por

$$x(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t}$$

onde$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. A coordenada $x(t)$ decresce exponencialmente enquanto que a coordenada $y(t)$ cresce exponencialmente. A origem é chamada de ponto de sela.



2.1.3 AUTOVALORES REAIS E IGUAIS

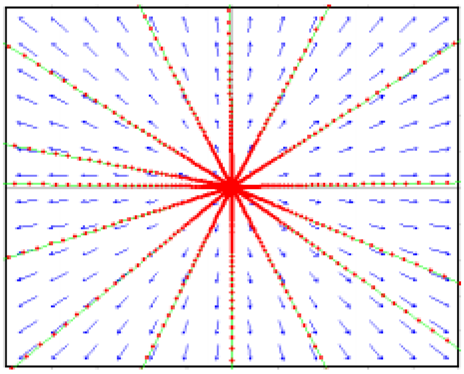
Vamos supor que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Existem dois subcasos, dependendo se o autovalor repetido tem dois autovalores independentes ou apenas um.

a) Dois autovetores independentes:

A solução geral do sistema é da forma

$$x(t) = c_1 v_1 e^{\lambda t} + c_2 v_2 e^{\lambda t}$$

em que v_1 e v_2 são os autovetores independentes. Toda trajetória está sobre uma reta que passa pela origem. Se $\lambda < 0$, todas as soluções convergem para a origem quando $t \to \infty$, porém, se $\lambda > 0$, as soluções afastam-se da origem quando t cresce, conforme a figura abaixo. Neste caso, a origem é chamada de nó próprio.



b) Um autovetor independente:

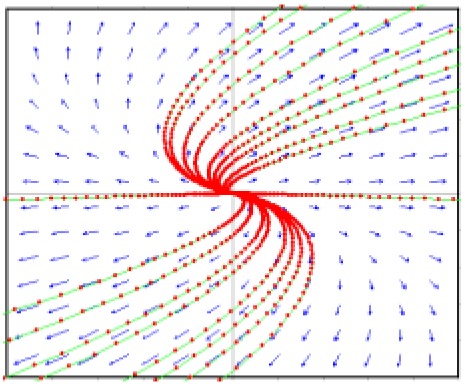
Neste caso, o ponto crítico é chamado de nó impróprio e a solução é dada por

$$x(t) = c_1 v_1 e^{\lambda t} + c_2 (v_1 t e^{\lambda t} + v_2 e^{\lambda t})$$

ondev_1 é o autovetor e v_2 é o autovetor generalizado associado ao autovalor repetido.

Pata t muito grande, o termo dominante nesta equação é $c_2 v_1 t e^{\lambda t}$. Assim, quando $t \to \infty$, todas as trajetórias tendem à origem e são tangentes à reta na direção do autovetor v_1.

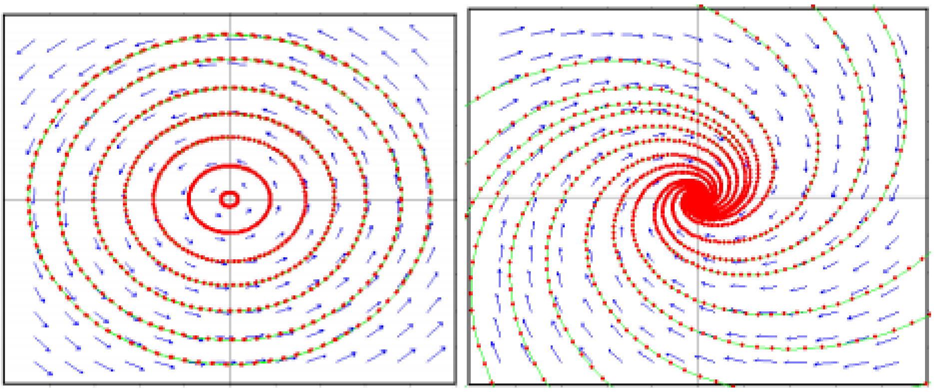
Analogamente, para valores negativos de t, o termo $c_2 v_1 t e^{\lambda t}$ é novamente dominante, de modo que, quando $t \to \infty$, cada trajetória assíntota uma reta paralela à v_1. Portanto, a orientação das trajetórias depende das posições relativas de v_1 e v_2.



2.1.4 AUTOVALORES COMPLEXOS

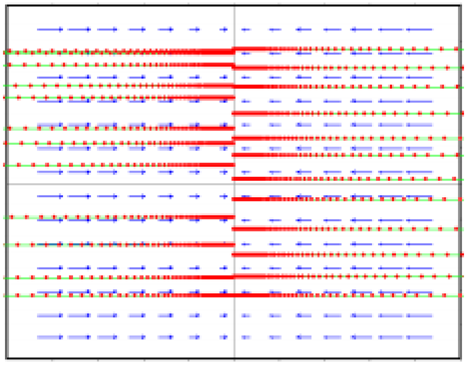
Neste caso, os autovalores são $\lambda_1 = \alpha + \beta i$e $\lambda_2 = \alpha - \beta i$.

A parte real(α) dos autovalores é responsável pelo crescimento/decrescimento da distância das soluções à origem, enquanto que a parte imaginária(β) é responsável pela rotação das soluções em torno da origem. As trajetórias nesse caso podem ser elipses, caso $\alpha = 0$,ou espirais, caso $\alpha \neq 0$, sendo que as soluções podem espiralar em direção à origem, caso $\alpha < 0$, ou para longe da origem, caso $\alpha > 0$. As imagens abaixo ilustram os casos em que$\alpha = 0$ e $\alpha < 0$, respectivamente.

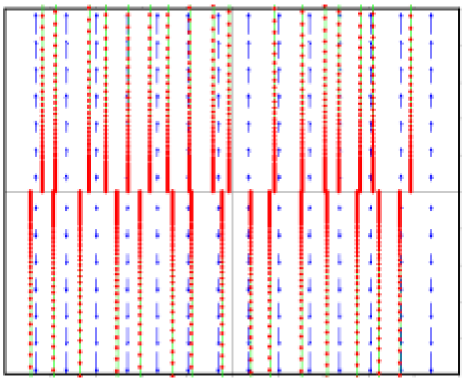


2.1.5 UM DOS AUTOVALORES NULO

Esses são casos degenerados. Se $\lambda_1 = 0$, então $x(t) = x_0$ é constante, enquanto que $y(t)$ pode crescer ou decrescer exponencialmente, de acordo com o sinal de λ_2. Todas as soluções são retas. As soluções são paralelas ao autovetor v_2 e, dependendo do sinal do autovalor λ_2, as soluções podem se afastar da origem ou se aproximar da origem.

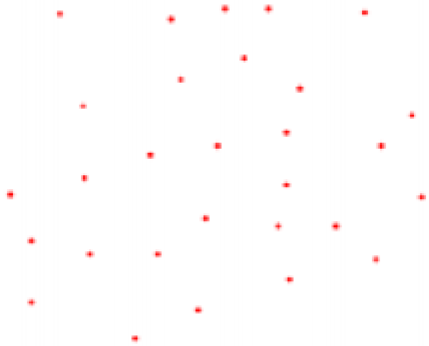


Se $\lambda_2 = 0$, então $y(t) = y_0$ é constante, enquanto que $x(t)$ pode crescer ou decrescer exponencialmente, de acordo com o sinal de λ_1. Todas as soluções são retas. As soluções são paralelas ao autovetor v_1 e, dependendo do sinal do autovalor λ_1, as soluções podem se afastar da origem ou se aproximar da origem.



2.1.6 OS DOIS AUTOVALORES NULOS

Há ainda o caso em que ambos,λ_1 e λ_2, são nulos. Nesse caso, o sistema é completamente degenerado. Todas as soluções são constantes, com todos os pontos do plano sendo pontos fixos do sistema. Este caso é representado por



Agora que vimos alguns dos possíveis tipos de autovalores, vamos ao desenvolvimento prático do projeto proposto.

3 DESENVOLVIMENTO

Investigaremos os diferentes comportamentos da família de sistemas

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by \\ \dfrac{dy}{dt} = cx \end{cases}$$

a medida em que os parâmetros a, b e c mudam.

3.1 ITEM 1

Considerando $a = 0$, temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = by \\ \dfrac{dy}{dt} = cx \end{cases}$$

que pode ser representado na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Como vimos anteriormente, as soluções estão associadas aos autovalores. Então vamos estudar este sistema a partir dos autovalores – que são obtidos através das raízes do polinômio característico.

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$det \begin{bmatrix} 0 - \lambda & b \\ c & 0 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$-\lambda(-\lambda) - bc = 0$$

$$\lambda^2 = bc$$

$$\lambda = \pm\sqrt{bc}$$

Ou seja,

$$\lambda_1 = -\sqrt{bc}$$
$$\lambda_2 = \sqrt{bc}$$

Vamos analisar as regiões do plano bc:

•$bc = 0$

$\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 0$

•$bc > 0$

$\lambda_1 < 0$e$\lambda_2 > 0$

•$bc < 0$

Como$bc < 0$,

$$\lambda_1 = -\sqrt{-|bc|}$$

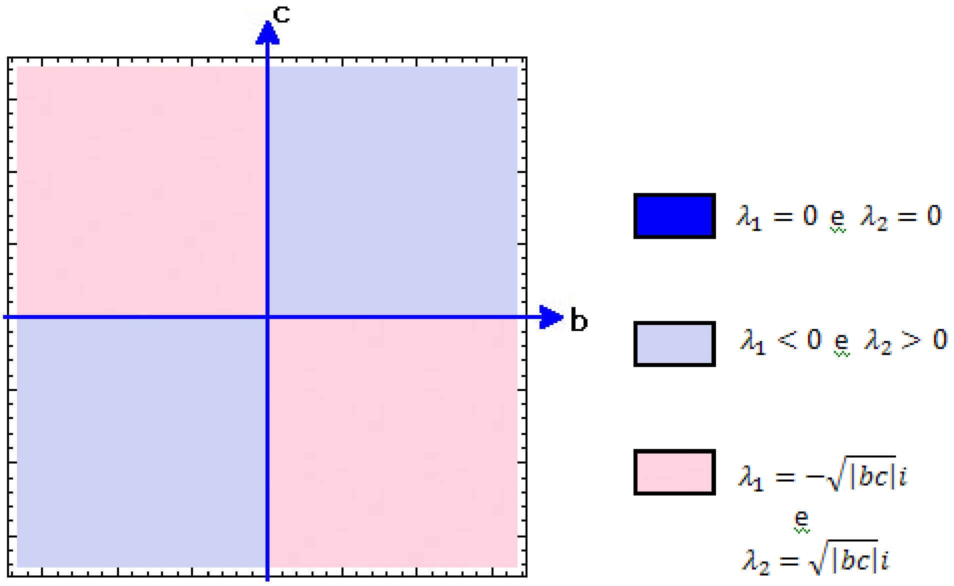
$$\lambda_1 = -\sqrt{|bc|}\sqrt{-1}$$

$$\lambda_1 = -\sqrt{|bc|}i$$

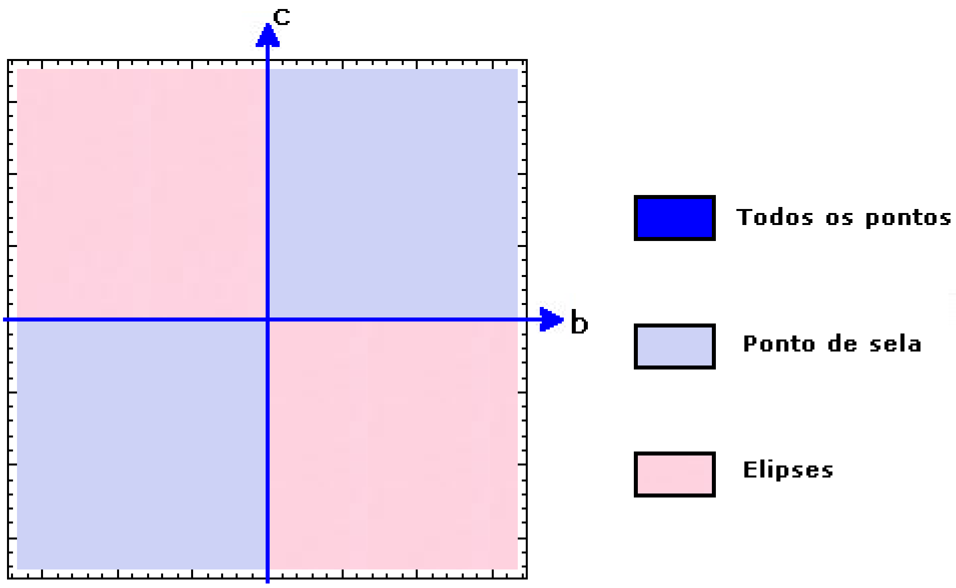
Similarmente, chegamos em

$$\lambda_2 = \sqrt{|bc|}i$$

Ou seja



Analisando as regiões dos diferentes tipos de retrato de fase, observamos que



3.2 ITEM 2

Considerando $a = 1$, temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + by \\ \dfrac{dy}{dt} = cx \end{cases}$$

que pode ser representado na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

De onde tiramos os autovalores através do polinômio característico

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$det \begin{bmatrix} 1-\lambda & b \\ c & 0-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$-\lambda(1-\lambda) - bc = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - bc = 0$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-bc)}}{2}$$

$$\lambda = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 + 4bc})$$

Ou seja,

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 + 4bc})$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4bc})$$

Vamos analisar as regiões do plano bc:

•$bc = 0$

$\lambda_1 = 0$e$\lambda_2 > 0$

•$bc > 0$

$\lambda_1 < 0$e$\lambda_2 > 0$

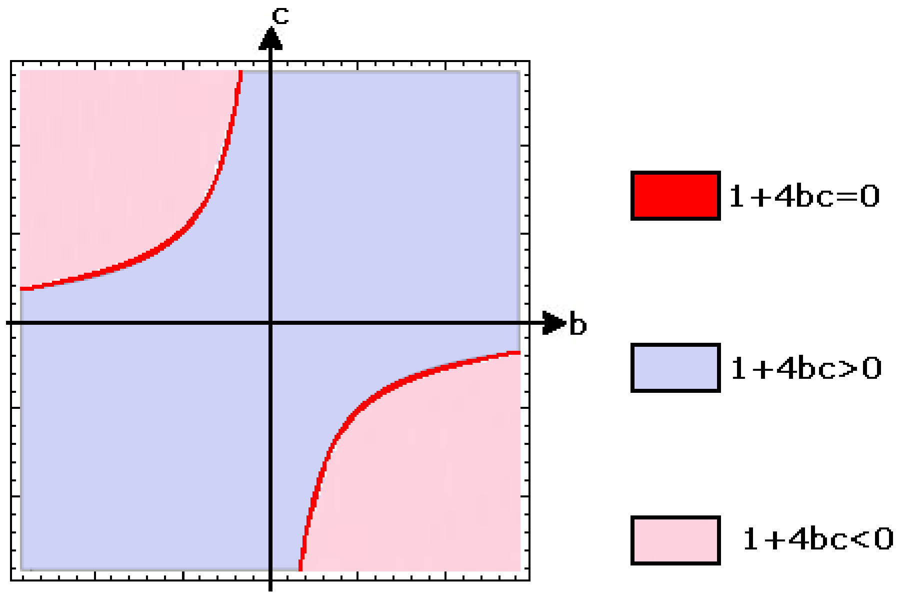
•$bc < 0$

Analisaremos dois casos:

$1 + 4bc \geq 0$e$1 + 4bc < 0$

$$1 + 4bc = 0$$

$$c = \frac{-1}{4b}$$



Vamos analisar também, as regiões onde $1+4bc>1$, $1+4bc=1$ e $1+4bc<1$

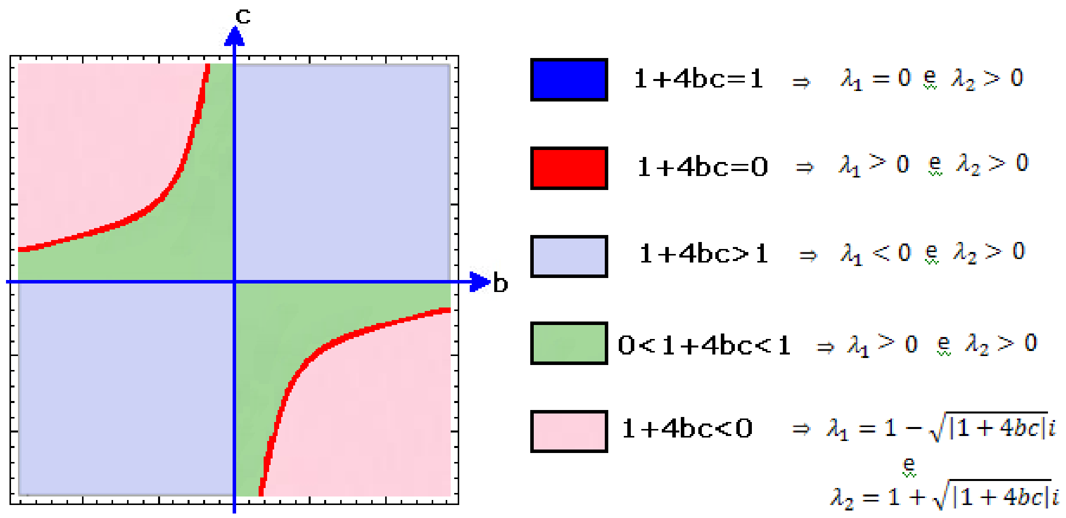
$1+4bc=1 \Rightarrow 4bc=0$

$1+4bc>1 \Rightarrow 4bc>0$

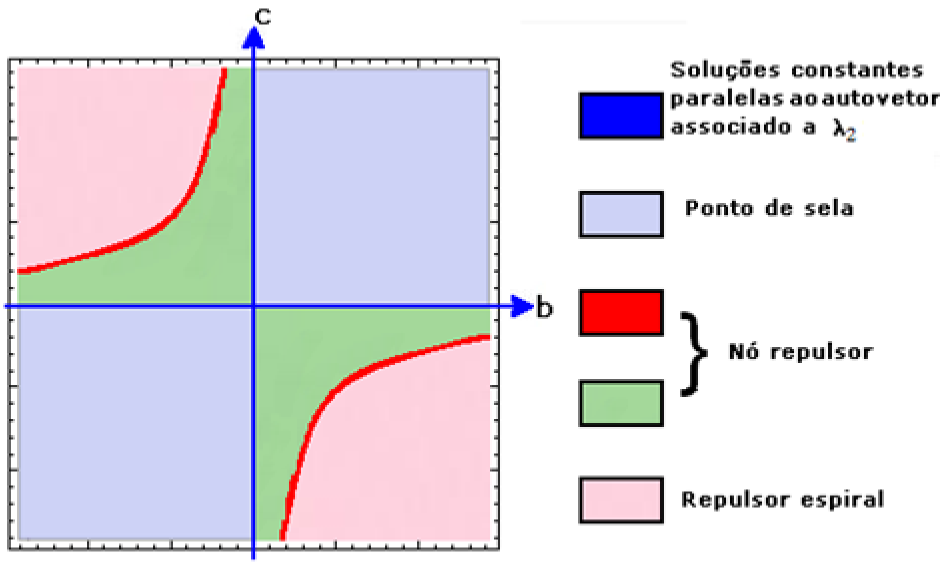
$1+4bc<1 \Rightarrow 4bc<0$

Ou seja, é a mesma região observada no item 1. Vimos que $1+4bc=1$ sobre os eixos, $1+4bc>1$ nos quadrantes ímpares e $1+4bc<1$ nos quadrantes pares.

Considerando estas duas ultimas regiões simultaneamente, observamos que



Analisando as regiões dos diferentes tipos de retrato de fase, observamos que



3.3 ITEM 3

Iremos descrever o comportamento do sistema para $0 < a < 1$.

Vamos estudar o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by \\ \dfrac{dy}{dt} = cx \end{cases}$$

que pode ser representado na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

De onde tiramos os autovalores através do polinômio característico

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$det \begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & 0-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$-\lambda(a-\lambda) - bc = 0$$

$$\lambda^2 - a\lambda - bc = 0$$

$$\lambda = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4(-bc)}}{2}$$

$$\lambda = \frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2 + 4bc})$$

Ou seja,

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 + 4bc})$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + 4bc})$$

Nesse caso, como temos três variáveis, analisaremos o espaço bca.

Temos as seguintes possibilidades para os autovalores:

i) λ_1eλ_2 ambos positivos
ii) λ_1eλ_2 ambos negativos
iii) λ_1eλ_2 de sinais opostos
iv) $\lambda_1 = \lambda_2$
v) $\lambda_1 = 0$
vi) $\lambda_2 = 0$

É possível notar que em i, ii e iii, ao provocar uma pequena mudança nos autovalores, nós ainda podemos continuar nesses casos mas, nos casos iv, v e vi, ao fazer tal alteração, nós deixamos de estar neles e passamos para outro caso. Por isso, iremos considerá-los para construir as regiões no espaço bca.

Iremos considerar os casos degenerados como fronteiras no espaço bca. Vamos construir uma superfície para cada caso degenerado e estudar as regiões entre as superfícies obtidas.

- $\lambda_1 = \lambda_2$

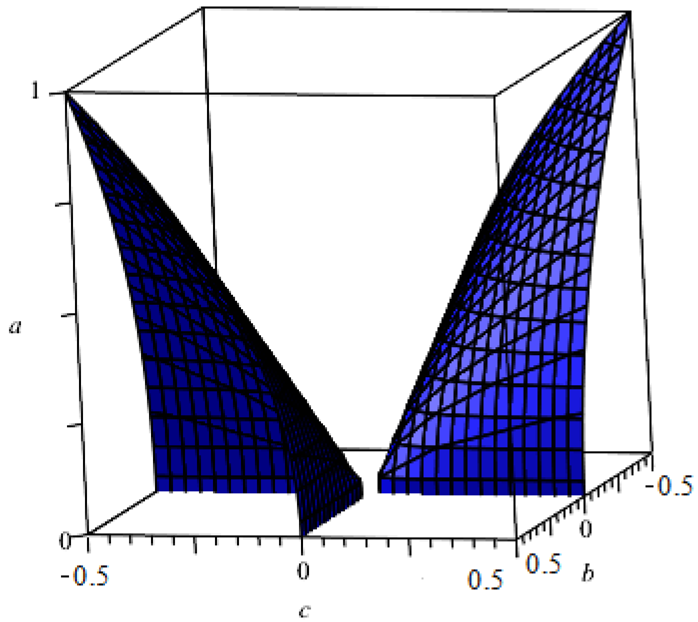
$$\frac{1}{2}\left(a - \sqrt{a^2 + 4bc}\right) = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + 4bc}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + 4bc} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4bc = -a^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 = -4bc$$

$a^2 = -4bc$nos dá a seguinte superfície:

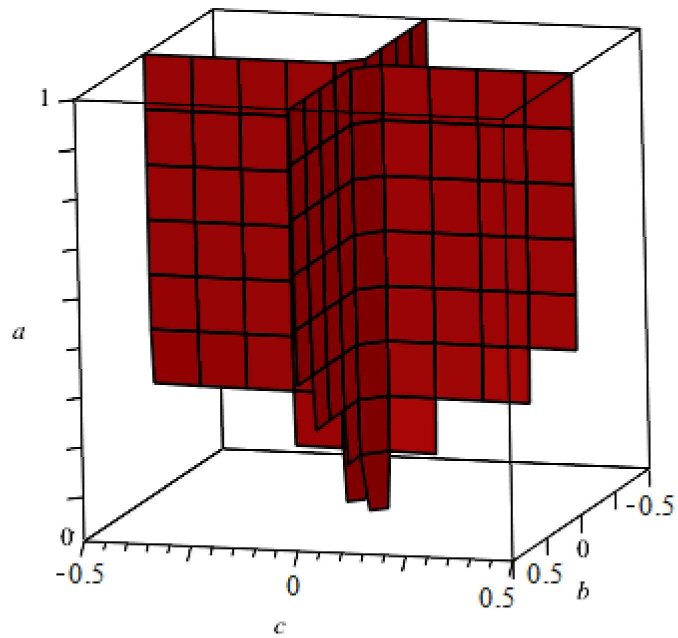


•$\lambda_1 = 0$

$$\frac{1}{2}\left(a - \sqrt{a^2 + 4bc}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + 4bc} = a$$

$a = \sqrt{a^2 + 4bc}$nos dá a seguinte superfície:



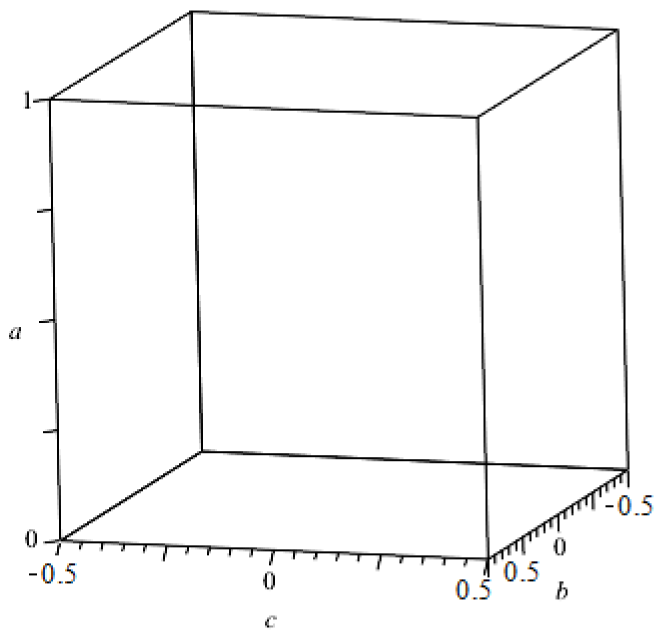
•$\lambda_2 = 0$

$$\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+4bc}\right)=0$$

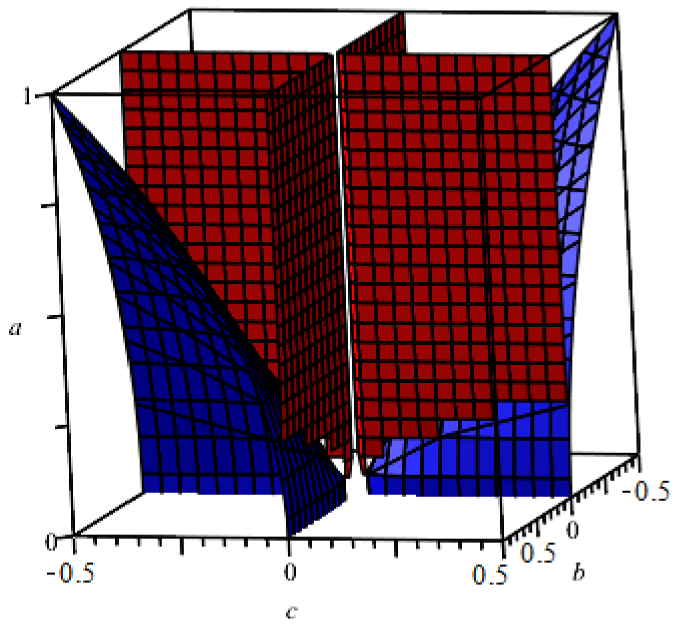
$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+4bc}=-a$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{a^2+4bc}=a$$

para$a=-\sqrt{a^2+4bc}$, $a \geq 0$, não há superfície. Há apenas um ponto, a origem



Juntando as três superfícies em um mesmo gráfico, obtemos:



Vamos analisar os diferentes tipos de retratos de fase:

•Sobre a superfície $a = \sqrt{a^2 + 4bc}$, em vermelho, temos $\lambda_1 = 0$

•Sobre a superfície $a^2 = -4bc$, em azul, temos $\lambda_1 = \lambda_2$

•Nas duas regiões onde $bc > 0$, temos

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 + 4bc}) \text{e} \lambda_2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + 4bc})$$

$\Rightarrow \lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 > 0$

•Nas duas regiões onde $bc < 0$, vamos analisar dois casos:

-Regiões abaixo de $a^2 = -4bc$, em azul:

Abaixo dessa superfície, temos $a^2 < -4bc$

Como $bc < 0$, vamos considerar $bc = -|bc|$

$\Rightarrow a^2 < 4|bc|$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 + 4bc}) \text{e} \lambda_2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + 4bc})$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - 4|bc|}) \text{ e } \lambda_2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - 4|bc|})$$

$\Rightarrow \lambda_1$ e λ_2 são autovalores complexos

-Regiões acima de $a^2 = -4bc$, em azul:

Acima dessa superfície, temos $a^2 > -4bc$

Como $bc < 0$, vamos considerar $bc = -|bc|$

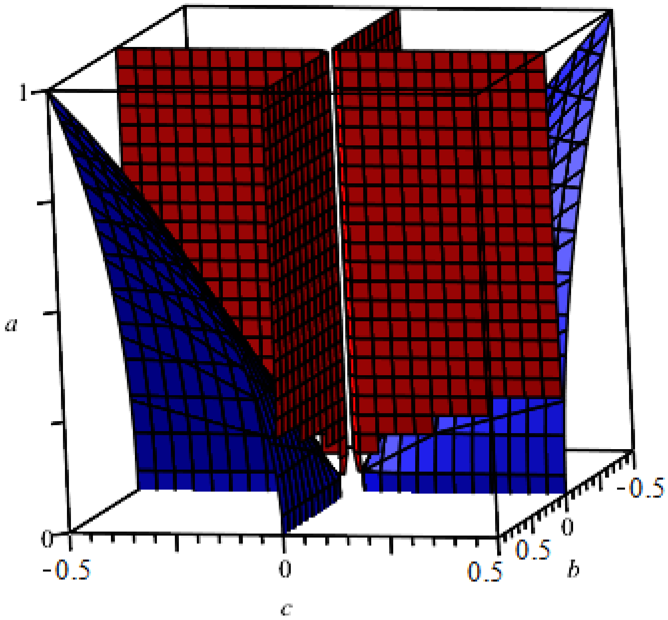
$\Rightarrow a^2 > 4|bc|$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 + 4bc}) \text{e} \lambda_2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + 4bc})$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - 4|bc|}) \text{ e } \lambda_2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - 4|bc|})$$

$\Rightarrow \lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$

Ou seja



Sobre a superfície $\sqrt{a^2 + 4bc} = a$, em vermelho, temos soluções paralelas ao autovetor associado a λ_2.

Sobre a superfície $a^2 = -4bc$, em azul, a origem é um nó impróprio.

Na origem, todos os pontos são soluções.

Nas duas regiões onde $bc > 0$, a origem é um ponto de sela.

Nas regiões onde $bc < 0$, abaixo de $a^2 = -4bc$, em azul, temos espirais.

Nas regiões onde $bc < 0$, acima de $a^2 = -4bc$, em azul, a origem é um nó repulsor.

3.4 ITEM 4

Considerando $a = -1$, temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + by \\ \dfrac{dy}{dt} = cx \end{cases}$$

que pode ser representado na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

De onde tiramos os autovalores através do polinômio característico

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$det \begin{bmatrix} -1-\lambda & b \\ c & 0-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$-\lambda(-1-\lambda) - bc = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - bc = 0$$

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(-bc)}}{2}$$

$$\lambda = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{1+4bc})$$

Ou seja,

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{1+4bc})$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1+4bc})$$

Vamos analisar as regiões do plano bc:

•$bc = 0$

$\lambda_1 < 0$e$\lambda_2 = 0$

•$bc > 0$

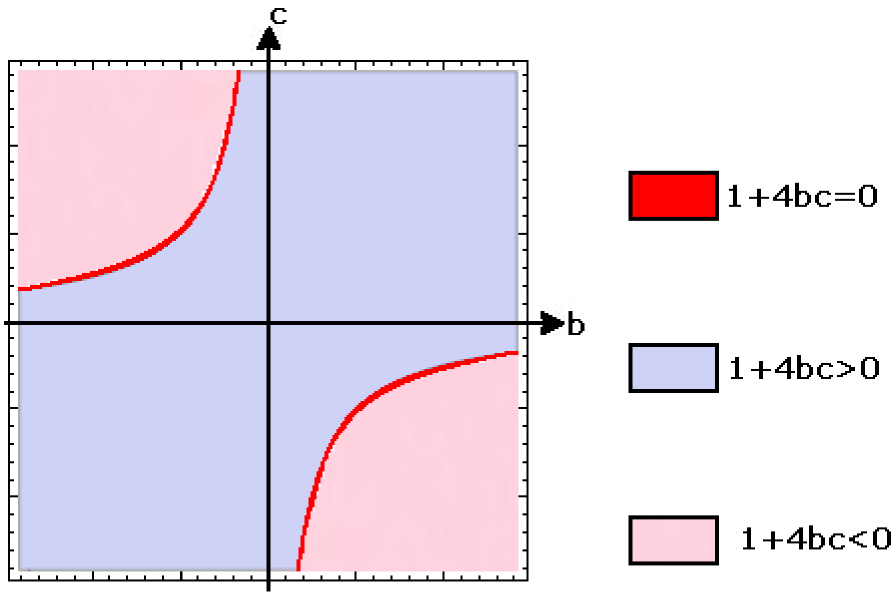
$\lambda_1 < 0$e$\lambda_2 > 0$

•$bc < 0$

Analisaremos dois casos:

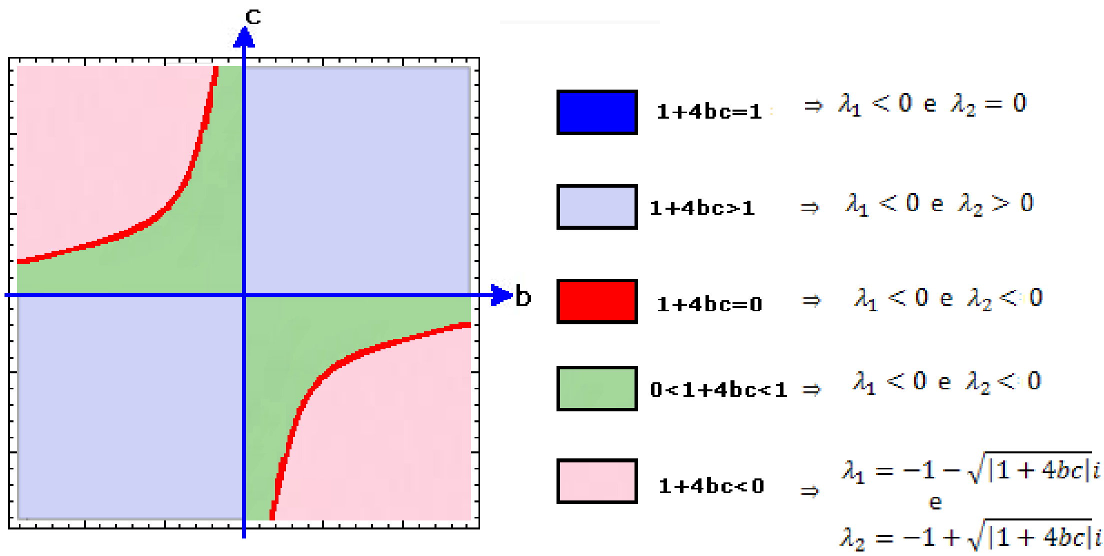
$1 + 4bc \geq 0$e$1 + 4bc < 0$

Que já foi feito na parte 2

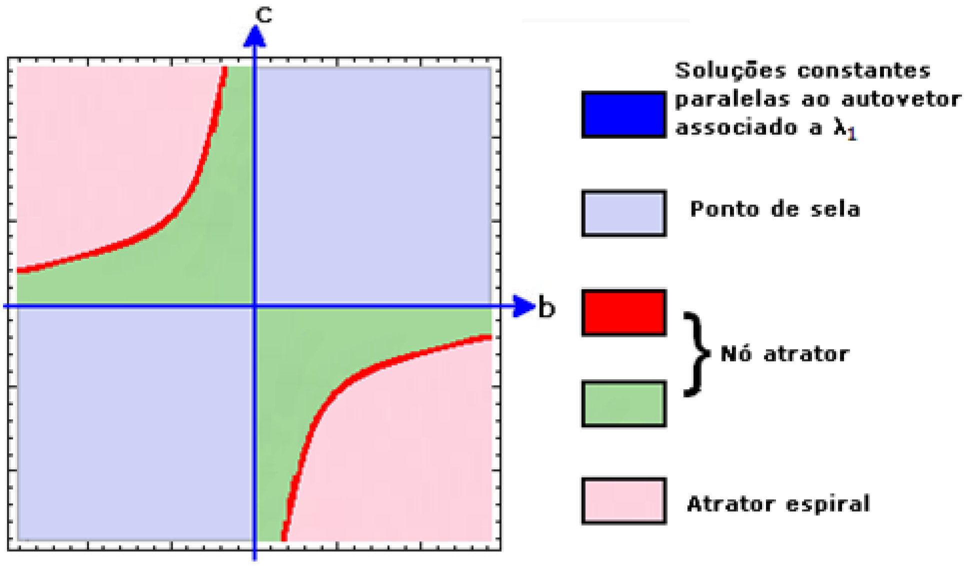


Também vimos as regiões em que$1 + 4bc > 1$, $1 + 4bc = 1$ e $1 + 4bc < 1$

Ou seja, temos a mesma região analisada no item 2



Analisando as regiões dos diferentes tipos de retrato de fase, observamos que



3.5 ITEM 5

Usaremos o mesmo procedimento feito no item 3 porém, ao invés de considerarmos apenas $0 < a < 1$, vamos considerar $-1 < a < 1$.

Iremos considerar os casos degenerados como fronteiras no espaço bca. Vamos construir uma superfície para cada caso degenerado e estudar as regiões entre as superfícies obtidas.

- $\lambda_1 = \lambda_2$

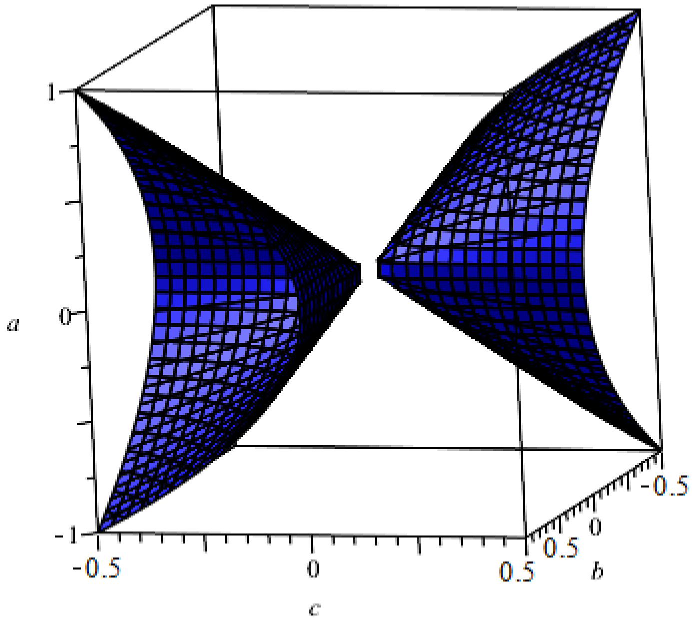
$$\frac{1}{2}\left(a - \sqrt{a^2 + 4bc}\right) = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + 4bc})$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + 4bc} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4bc = -a^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 = -4bc$$

$a^2 = -4bc$nos dá a seguinte superfície:

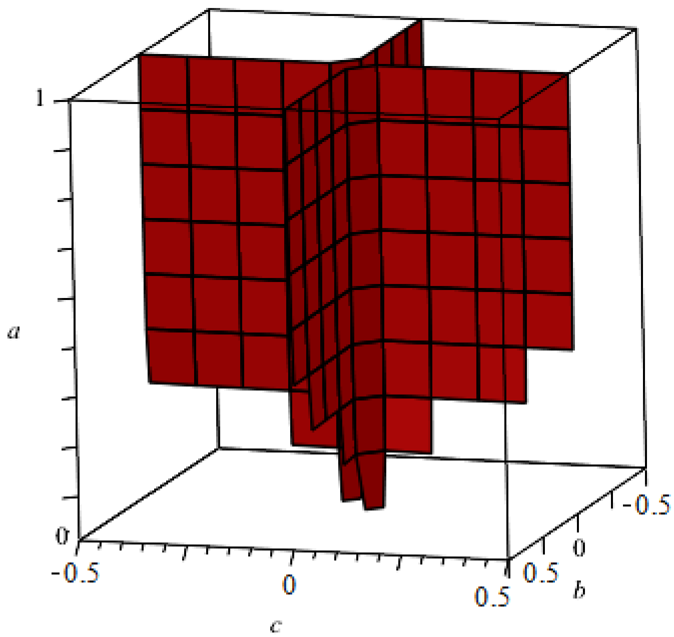


•$\lambda_1 = 0$

$$\frac{1}{2}\left(a - \sqrt{a^2 + 4bc}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + 4bc} = a$$

$a = \sqrt{a^2 + 4bc}$nos dá a seguinte superfície:



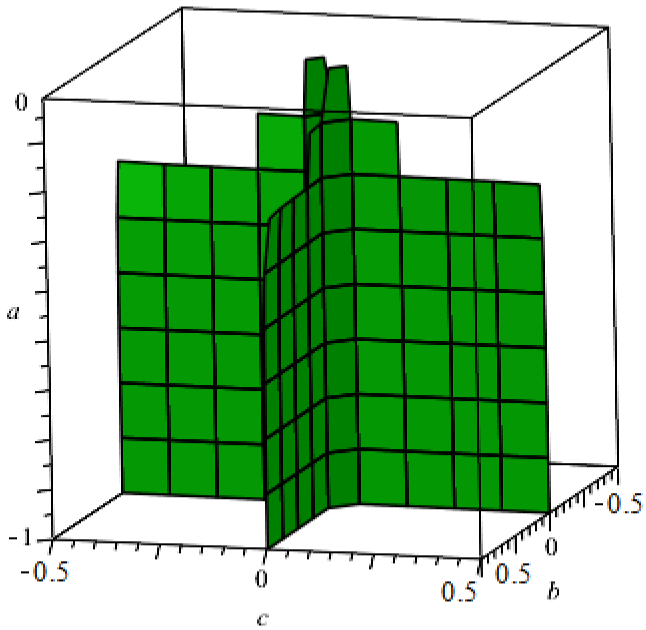
•$\lambda_2 = 0$

$$\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + 4bc}\right) = 0$$

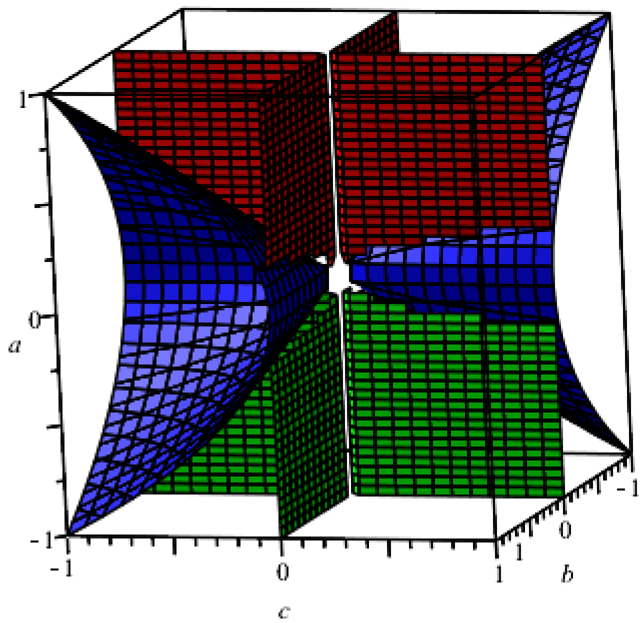
$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + 4bc} = -a$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{a^2 + 4bc} = a$$

$a = -\sqrt{a^2 + 4bc}$nos dá a seguinte superfície:



Juntando as três superfícies em um mesmo gráfico, obtemos:



Como já analisamos para $0 < a < 1$, vamos analisar somente $-1 < a < 0$ e, posteriormente, juntar os resultados obtidos.

•Sobre a superfície $a = -\sqrt{a^2 + 4bc}$, em verde, temos $\lambda_2 = 0$

•Sobre a superfície $a^2 = -4bc$, em azul, temos $\lambda_1 = \lambda_2$

•Nas duas regiões onde $bc > 0$, temos

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 + 4bc})\text{e}\lambda_2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + 4bc})$$

$\Rightarrow \lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 > 0$

•Nas duas regiões onde $bc < 0$, vamos analisar dois casos, lembrando que vamos analisar a parte em que $-1 < a < 0$:

-Regiões abaixo de $a^2 = -4bc$, em azul:

Abaixo dessa superfície, temos $a^2 > -4bc$

Como $bc < 0$, vamos considerar $bc = -|bc|$

$\Rightarrow a^2 > 4|bc|$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 + 4bc})\text{e}\lambda_2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + 4bc})$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - 4|bc|}) \text{ e } \lambda_2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - 4|bc|})$$

$\Rightarrow \lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$

-Regiões acima de $a^2 = -4bc$, em azul,(entre o parabolóide e o plano bc):

Nessa região, temos $a^2 < -4bc$

Como $bc < 0$, vamos considerar $bc = -|bc|$

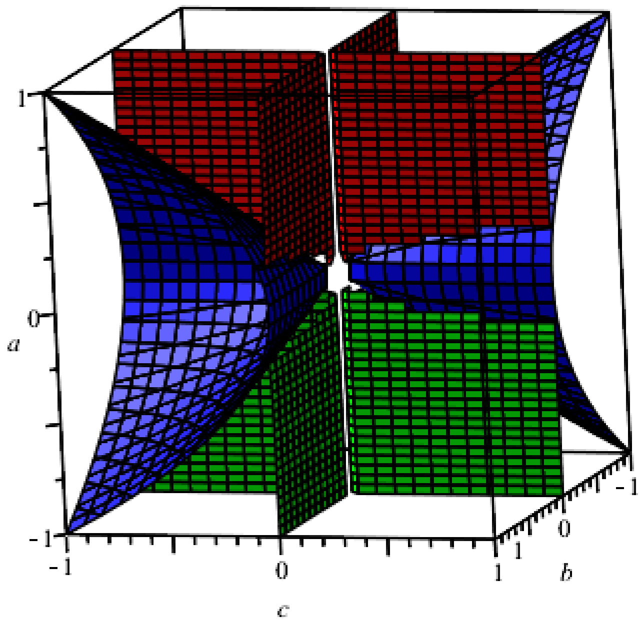
$\Rightarrow a^2 < 4|bc|$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 + 4bc})\text{e}\lambda_2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + 4bc})$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - 4|bc|}) \text{ e } \lambda_2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - 4|bc|})$$

$\Rightarrow \lambda_1$e$\lambda_2$são autovalores complexos

Ou seja, agora que analisamos $0 < a < 1$ e $-1 < a < 0$, vamos juntar os dados obtidos:



Sobre a superfície $a = -\sqrt{a^2 + 4bc}$, em verde, temos soluções paralelas ao autovetor associado a λ_1.

Sobre a superfície $\sqrt{a^2 + 4bc} = a$, em vermelho, temos soluções paralelas ao autovetor associado a λ_2.

Sobre a superfície $a^2 = -4bc$, em azul, a origem é um nó impróprio.

Na origem, todos os pontos são soluções.

Nas duas regiões onde $bc > 0$, a origem é um ponto de sela.

Nas duas regiões onde $bc < 0$, vamos analisar dois casos:

Na região interior ao parabolóide, temos espirais.

Na região externa ao parabolóide, a origem é um nó repulsor.

4 CONCLUSÃO

Neste projeto foi abordado os diferentes tipos de retratos de fase de um sistema de equações diferenciais lineares homogêneas de primeira ordem com coeficientes constantes. Apesar de a apresentação de tais resultados sejam visualizados com mais clareza com o uso de softwares adequados, é possível visualizar razoavelmente todos os resultados através deste roteiro.

5 REFERÊNCIAS

[1] Boyce, W.E. eDiprima, R. C. Equações Diferenciais Elementares e Prolemas de Valores de Contorno. Editora LTC S.A, Rio de Janeiro, 2005

[2] Zill, Dennis G. E Cullen, Michael R. Equações Diferenciais – Volumes 1 e 2. Editora Makron Books, São Paulo, 2001.