Sobre as várias definições de números $\mathbb{C}$omplexos

Gentil Lopes da Silva*

10 de fevereiro de 2010

Resumo

O objetivo deste trabalho é fazermos uma crítica (exegese) sobre as várias definições de números complexos, existentes na literatura.

> "...que o meu pensamento quis aproximar-se dos problemas do espírito pela via de uma diversa experimentação de caráter abstrato, especulativo, resultante das conclusões de processos lógicos da mais moderna físico-matemática."
> (Pietro Ubaldi)

1 Introdução

Como se sabe os conceitos dos entes (objetos) matemáticos vieram evoluindo ao longo do tempo, como por exemplo o conceito de função (ver [5]). Enquanto o conceito (definição) de função hoje encontra-se "fechado"; digo, perfeitamente compreendido, o mesmo não acontece com o importante conceito de número, assim creio.

Neste artigo, não apenas estaremos mostrando que os matemáticos ainda hoje tropeçam no conceito de número como também construiremos uma definição − de tal ente − a qual tem nos rendido bons dividendos; digo, uma definição plenamente satisfatória.

2 Sobre os números complexos

Que os matemáticos do século XVIII ainda não tinham uma compreensão satisfatória do conceito de números − em particular o de números complexos é o que se depreende da citação a seguir (ver [1]):

> A ambivalência dos matemáticos do século XVIII em relação aos números complexos pode mais uma vez ser evidenciada em Euler. Apesar de seus trabalhos em que ensinava a operar com eles, afirma
>
> "Como todos os números concebíveis são maiores ou menores do que zero ou iguais a zero, fica então claro que as raízes quadradas de números negativos não podem ser incluídas entre os números possíveis [números reais]. E esta circunstância nos conduz ao conceito de tais números, os quais, por sua própria natureza, são impossíveis, e que são geralmente chamados de números imaginários, pois existem somente na imaginação."

*www.dmat.ufrr.br/∼ gentil ∴ gentil.silva@gmail.com

Observe que, na mente de Euler, "todos os números concebíveis são maiores ou menores do que zero ou iguais a zero"; o que prova que Euler e, por extensão os demais matemáticos, não havia ainda atinado com uma compreensão necessária do conceito de número.

Nota: Como dissemos o conceito de número veio evoluindo ao longo dos séculos; portanto é perfeitamente compreensível que os matemáticos, de então, não se sentissem à vontade com este conceito, bem sabemos que isto em nada diminui os méritos destes grandes matemáticos, o que não nos impede, todavia, de pôr em evidência esta curiosa particularidade.

Agora, o que é de surpreender é que uma parcela considerável dos matemáticos hodiernos ainda se sintam trôpegos quanto ao conceito em questão, como estaremos mostrando.

Na literatura encontramos algumas abordagens (definições) para os números complexos; para o propósito que temos em mente elegeremos duas definições − as quais acreditamos serem representantes das demais.

D1. Na referência [1] encontramos:

1. Introdução

Iniciaremos lembrando que as operações de soma e produto de números reais possuem um certo número de propriedades fundamentais, que são as seguintes:

(1) A adição e a multiplicação são *comutativas*, isto é, se a e b são números reais, então

$$a + b = b + a, \qquad ab = ba.$$

(2) A adição e a multiplicação são *associativas*, isto é, se a, b e c são números reais, então

$$(a + b) + c = a + (b + c), \qquad (ab)c = a(bc).$$

(3) A multiplicação é distributiva relativamente à adição, isto é, se a, b e c são números reais,

$$a(b + c) = ab + bc.$$

(4) Existem e são únicos os números 0 e 1 satisfazendo as condições:

$$a\,+\,0 = a, \qquad a1 = a,$$

para todo real a.

(5) A todo real a corresponde um único número real $(-a)$, e se $a \neq 0$, um único número real $\frac{1}{a}$, tais que

$$a + (-a) = 0 \;\text{ e }\; a\left(\frac{1}{a}\right) = 1.$$

Existem muitas maneiras de definir o conjunto dos números complexos. Adotaremos a seguinte:

Os *números complexos* constituem um conjunto $\mathbb{C}$, onde estão definidas operações de adição (indicado pelo sinal $+$) e de multiplicação (indicado pela simples justaposição de letras) com as propriedades **(1)**, **(2)**, **(3)**, **(4)** e **(5)**. Além disso, os números reais estão incluídos em $\mathbb{C}$ e:

a) Existe um número complexo i com $i^2 = -1$.

b) Todo número complexo pode ser escrito de uma maneira única na forma

$a+bi$, onde a e b são números reais (a é chamado *parte real* e b é chamado *parte imaginária* do complexo $a+bi$). Usa-se a notação $Re(a+bi) = a$ e $Im(a+bi) = b$.

Usando as propriedades de **(1)** a **(5)**, podemos operar com complexos de maneira análoga à que operamos com reais, com o cuidado de tomar $i^2 = -1$.

Vamos à definição do segundo autor:

D2. Na referência [2] encontramos:

1. Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Consideremos o produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{R}^2 = \{\, (x,\, y) |\; x \in \mathbb{R} \;\text{ e }\; y \in \mathbb{R}\,\}$$

isto é, $\mathbb{R}^2$ é o conjunto dos pares ordenados $(x,\, y)$ em que x e y são números reais.

Vamos tomar dois elementos, $(a,\, b)$ e $(c,\, d)$, de $\mathbb{R}^2$ para dar três definições importantíssimas:

a) *igualdade:* dois pares ordenados são iguais se, e somente se, apresentarem primeiros termos iguais e segundos termos iguais.

$$\boxed{(a,\, b) = (c,\, d) \quad \Leftrightarrow \quad a = c \;\text{ e }\; b = d}$$

b) *adição:* chama-se soma de dois pares ordenados a um novo par ordenado cujos primeiro e segundo termos são, respectivamente, a soma dos primeiros e a soma dos segundos termos dos pares dado.

$$\boxed{(a,\, b) + (c,\, d) = (a + c,\, b + d)}$$

c) *multiplicação:* chama-se produto de dois pares ordenados a um novo par ordenado cujo primeiro termo é a diferença entre o produto dos primeiros termos e o produto dos segundos termos dos pares dados e cujo segundo termo é a soma dos produtos do primeiro termo de cada par dado pelo segundo termo do outro.

$$\boxed{(a,\, b) \cdot (c,\, d) = (ac - bd,\, ad + bc)}$$

2. Definição

Chama-se conjunto dos números complexos, e representa-se por $\mathbb{C}$, o conjunto dos pares ordenados de números reais para os quais estão definidas a igualdade, a adição e a multiplicação conforme o item 1.

3 Uma exegese das definições acima

Inicialmente faremos uma análise da primeira definição (isto é, a do livro [1]).

Antes, esclarecemos que na matemática existem certos conceitos delicados (sutis) os quais devem ser tratados com bastante cuidado (respeito, até), sob pena de permanecerem obnubilados (confusos). A nossa análise a seguir não deve ser confundida com pedantismo porquanto o conceito de número é assaz sutil e não podemos nos descuidar em seu trato.

Pois bem, na primeira definição, (**D1**.), o(s) autor(es) nos informa(m) de que "Existem muitas maneiras de definir o conjunto dos números complexos". Se é assim, ao nosso ver, o autor foi infeliz em ter feito aquela escolha. A sua é o que podemos chamar de uma definição *perdulária* e *esotérica* (nebulosa). Com efeito, é perdulária porquanto o autor assume (postula) que as operações complexas devem satisfazer as propriedades de **(1)** a **(5)**, é esotérica porquanto o autor impõe a existência de um número complexo i tal que $i^2 = -1$. Oportunamente estaremos provando que nada disto é necessário.

Quem estuda este assunto pela primeira vez tem a sensação de que um tal número*, com uma tal propriedade, caiu do céu. Não achamos que seja necessária esta prestidigitação uma vez que, com uma ligeira mudança de perspectiva, podemos provar e deixar tudo isto transparente, tal como faremos no momento oportuno.

Em **b)** postula-se que todo número complexo é da forma $a + bi$, com a e b reais.

Ora, se eu ainda não sei o que é um número complexo isto me parece um tanto quanto esotérico; uma vez que me foi dito que $+$ é uma operação chamada de adição, isto me deixa confuso quanto ao possível significado de $a + bi$. Com efeito, o que poderia significar a adição do número real a com o número, sei lá o quê, bi? Ademais, qual poderia ser o possível significado da multiplicação, bi, de um número real por um número complexo?

A minha cabeça está muito confusa! Mais à frente (pg. 69) lemos:

"Da definição adotada, decorre que podemos pensar no número complexo $a + bi$ como o ponto $(a,\, b)$ cujas coordenadas são a e b, ou ainda como o *vetor* (isto é, o segmento orientado) de origem na origem O do sistema de coordenadas e extremidade $(a,\, b)$, isto é, o complexo z é representado pelo vetor $\overrightarrow{Oz}$."

Em seguida, "No primeiro caso, o ponto $(a,\, b)$ é chamado *imagem* do complexo $z = a + bi$ e no último caso, os números a e b são chamados componentes do vetor $\overrightarrow{Oz}$."

Toda esta celeuma apenas reforça minha convicção de que os matemáticos ainda hoje titubeiam quanto ao que seja um número, não têm uma idéia distinta.

O segundo autor ([2]) me diz que $(a,\, b)$ é sim um número complexo, enquanto o autor em consideração me diz que "podemos pensar em $(a,\, b)$ como sendo um número complexo". Isto certamente pode confundir a cabeça de quem estuda o assunto pela primeira vez.

É certo que na matemática um mesmo objeto pode receber definições distintas, mas também é certo que devemos mostrar que estas definições se equivalem; digo, referem-se ao mesmo objeto.

Por sinal, é isto mesmo o que acontece na segunda obra (livro [2]), esta equivalência é mostrada. O segundo autor (Gelson Iezzi) que optou por dizer que $(a,\, b)$ é um número complexo, a seguir a lógica do primeiro deveria dizer que este número "pode ser pensado como $a + bi$".

Reitero: por qualquer definição que se resolva adotar devemos (é possível) mostrar que tanto $a + bi$ quanto $(a,\, b)$ são números complexos legítimos e não que "um número complexo pode ser pensado como um par $(a,\, b)$".

Número é um conceito abstrato que, todavia, pode tomar corpo de diversos

*Aliás até o presente momento não se sabe o que é um número complexo.

modos. Ou ainda, fazendo uma analogia com o universo da informática: um número é um *software* que pode "rodar" (tomar corpo) em hardwares distintos.

− Quanto à definição **D2**. não temos nenhuma objeção a fazer.

Daqui a pouco provaremos que tanto (a, b) quanto $a + bi$ são números complexos legítimos, antes faremos uma digressão com o escopo de deixar claro o importante conceito de número.

Não é necessário que número seja um conceito primitivo

Peano, em sua axiomática para a construção dos números naturais, toma número como um *conceito primitivo*, não achamos que isto seja necessário uma vez que podemos defini-lo. Esta atitude de Peano, pelo ao menos a mim, mostra que êle, também, não sentia-se à vontade com o conceito em questão.

Desde já chamamos a atenção do leitor para um ponto que consideramos importante: Para se compreender (ou estabelecer) determinados "conceitos delicados" em matemática (como é o de número) não há como não ser estritamente formal (rigoroso), não trata-se de *pedantismo*, mas de uma necessidade intrínseca ao assunto que se deseja compreender. Uma compreensão da gênese de certos conceitos, repetimos, exige um formalismo adequado. Em sendo assim, tendo em conta nosso objetivo: definir − de modo satisfatório − o que vem a ser um número, não exitaremos no rigor necessário.

Desde já deixamos claro que tudo o que se segue é a nossa maneira pessoal de tratar essa questão, ela tem nos rendido bons dividendos.

4 Conjuntos × Estruturas

"No início era o caos ... e Deus disse: 'Que exista a luz!' E a luz começou a existir." `(Gn 2:3)`

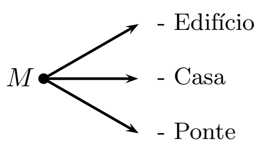
Para, posteriormente, darmos uma definição de número precisamos, antes, fazer distinção entre *conjunto* e *estrutura*.

Em matemática são freqüentes conjuntos munidos de uma ou mais operações, que gozam de certas propriedades. Esses conjuntos com tais operações e respectivas propriedades constituem aquilo que denominamos estruturas algébricas.

Para nos auxiliar em nosso objetivo (deixar claro a diferença entre conjunto e estrutura) vamos recorrer a uma analogia: Suponhamos um conjunto M cujos elementos são materiais de construção, assim:

$$M = \{\text{tijolo, cimento, telha, pedra, areia, } \ldots\}$$

"sobre" este conjunto podemos construir diversas estruturas, por exemplo:



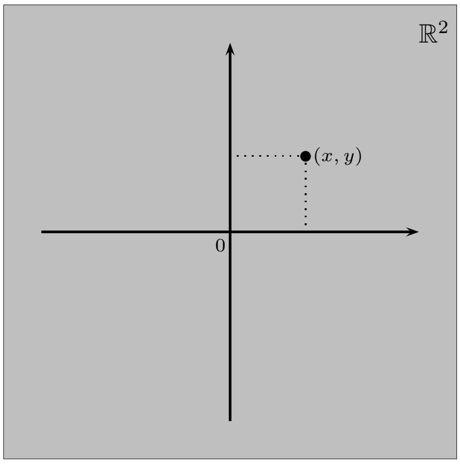
Não devemos confundir o conjunto M com a "estrutura" edifício, por exemplo.

Mas este tipo de confusão é o que comumente se faz quando se fala de conjuntos numéricos. No nosso entendimento um "conjunto numérico" não é um conjunto, mas sim uma *estrutura*. Há tanta imprecisão em considerar um "conjunto" numérico como um conjunto, quanto confundir o edifício com o conjunto M.

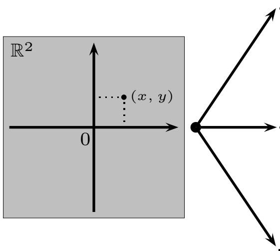
- Com um jogo de xadrez também podemos jogar damas. Em outras palavras, com o conjunto das peças de um xadrez podemos construir duas estruturas: dama e xadrez.

- O mesmo acontece com respeito ao conjunto das cartas de um baralho, com o qual podemos ter diversos jogos (estruturas).

Vejamos um exemplo retirado da matemática. Considere o conjunto de pontos $\mathbb{R}^2 = \{\,(x,\,y)\colon x,\,y \in \mathbb{R}\,\}$ cuja versão geométrica é vista a seguir:



sobre este conjunto podemos construir, por exemplo, três estruturas, assim:



- Espaço vetorial: $\begin{cases} (a,\,b)+(c,\,d)=(a+c,\,b+d) \\ \lambda(a,\,b)=(\lambda a,\,\lambda b) \end{cases}$

- Números $\mathbb{C}$: $\begin{cases} (a,\,b)+(c,\,d)=(a+c,\,b+d) \\ (a,\,b)\cdot(c,\,d)=(ac-bd,\,ad+bc) \end{cases}$

- ANEL: $\begin{cases} (a,\,b)+(c,\,d)=(a+c,\,b+d) \\ (a,\,b)\cdot(c,\,d)=(ab,\,cd) \end{cases}$

Assim o número de estruturas que podemos *erigir* sobre um mesmo conjunto estará limitado apenas por nossa criatividade. Por exemplo, no artigo [4] construimos mais uma estrutura sobre o $\mathbb{R}^2$.

Por oportuno, observamos que assim como podemos construir diversas estruturas sobre um mesmo conjunto, a recíproca também vale: uma mesma estrutura pode ser erigida sobre vários conjuntos. Por exemplo, em [3] construimos os números naturais sobre dois conjuntos distintos; aqui, digo, logo mais, construiremos o sistema números complexos sobre dois conjuntos distintos.

Em matemática é extremamente importante a distinção entre conjunto e estrutura. Em alguns livros ao invés de conjunto dos números reais diz-se sistema dos números reais, designação esta mais apropriada, uma vez que nos permite uma distinção entre conjunto e estrutura.

4.1 A Identidade de um Elemento

Uma outra distinção que se faz necessária é quanto a natureza (identidade) de um elemento.

Perguntamos: afinal de contas o par ordenado $(3, 2)$ é um vetor ou um número complexo?

Respondemos: o par ordenado $(3, 2)$, por si só, não é nem uma coisa nem outra, é apenas um elemento do conjunto $\mathbb{R}^2$. Agora dependendo do contexto em que nos situamos, este elemento pode ser um vetor ou um número complexo.

Se, por exemplo, o par ordenado (3, 2) estiver inserido no contexto de espaço vetorial* ele será um vetor, se estiver inserido no contexto de números complexos ele será um número complexo.

Uma analogia: É como se fose um mesmo ator desempenhando vários papéis.

Mais uma analogia: Nada nos impede de jogarmos dama com as mesmas peças do jogo de xadrez. A peça "bispo", por exemplo, perderia esta designação (perderia sua identidade) no jogo de dama.

Observe ainda que as três estruturas apresentadas anteriormente não diferem na adição, mas na multiplicação. Então o que vai conferir a identidade de um elemento é a regra de multiplicação.

Estabelecemos agora algumas definições:

Definição 1 (Operação)**.** *Sendo E um conjunto não vazio, toda aplicação $f\colon E \times E \to E$ recebe o nome de operação sobre E.*

Para construirmos um sistema numérico sobre um dado conjunto basta definirmos duas operações sobre este conjunto, uma das quais será chamada de adição e a outra de multiplicação, simbolizadas por $+$ e $\cdot$, respectivamente. Mais formalmente,

Definição 2 (Sistema numérico)**.** *Dado um conjunto $\mathbf{E}$ não vazio e duas operações sobre $\mathbf{E}$,*

$$+ : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \to \mathbf{E} \qquad\qquad \cdot : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \to \mathbf{E}$$
$$\quad (x, y) \mapsto x + y \qquad\qquad\qquad (x, y) \mapsto x \cdot y$$

A terna $(\mathbf{E}, +, \cdot)$ é o que entendemos por um sistema numérico (ou estrutura numérica). Usaremos da seguinte notação $(\mathbf{E}, +, \cdot) = \mathbb{E}$.

Definição 3 (Número)**.** *Um "elemento" de um conjunto continuará a ser chamado de elemento; agora, ao construirmos uma estrutura numérica (algébrica) sobre este conjunto, este elemento terá adquirido o status de número.*

Por exemplo, 1 é um elemento do conjunto dos naturais $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ enquanto que 1 é um número da estrutura $\mathbb{N} = \big(\mathbf{N}, +, \cdot\big)$.

* Isto é, se estiver sendo manipulado segundo as regras que definem um espaço vetorial.

Continuaremos a usar o símbolo de pertinência ($\in$) tanto de elemento para conjunto quanto de número para estrutura. Por exemplo,

$$1 \in \mathbf{N}, \quad 1 \in \mathbb{N}$$

No primeiro caso 1 é um reles elemento do conjunto dos naturais; enquanto no segundo caso, 1 terá adquirido o status de número do sistema numérico dos naturais.

4.2 Interregno cultural

`Um pouco de “filosofia” não faz mal a ninguém, pelo contrário é até salutar.`

Ainda como estudante, quando do meu primeiro contato com vetores e números complexos, ao final eu me perguntava:

Afinal de contas o par ordenado

$$(a,\, b)$$

é um vetor ou um número complexo?

Penso que esta questão merece uma análise mais detida, é o que faremos agora. Ora, uma vez que os próprios autores misturam estes conceitos não é de admirar que a cabeça do estudante “por indução” também fique confusa:

“Da definição adotada, decorre que podemos pensar no número complexo $a + bi$ como o ponto $(a,\, b)$ cujas coordenadas são a e b, ou ainda como o *vetor* (isto é, o segmento orientado) de origem na origem O do sistema de coordenadas e extremidade $(a,\, b)$, isto é, o complexo z é representado pelo vetor $\overrightarrow{Oz}$.”

Não vemos como esta mixórdia possa contribuir para o entendimento do que seja um número complexo, pelo contrário, a confusão só aumenta. Talvez ela seja motivada pelo fato de a definição de adição ser a mesma nas duas estruturas. Ora, como a adição é a mesma nas três estruturas (ver fig. pág. 6) podemos concluir que, a bem da verdade, o que vai conferir a identidade de um elemento é a definição de multiplicação; logo, não há razão para confundirmos os conceitos.

Ou talvez, quem sabe, ela (mixórdia) seja motivada pelo elemento em si, digo o par $(a,\, b)$, ser o mesmo nas duas estruturas, neste caso o erro é menos desculpável ainda – como já frisamos o que confere a identidade de um elemento é a estrutura e não o elemento em si.

Vamos colocar nossos argumentos sob uma nova perspectiva. Uma vez que nada nos impede de jogar *dama* com um tabuleiro de *xadrez*, podemos, sobre o conjunto das peças do xadrez construir duas estruturas:

X = {  }

- XADREZ: $(X,$ Regras do Xadrez$)$
- DAMA: $(X,$ Regras da Dama$)$

Se quisermos nos divertir devemos **optar** por um dos jogos (estruturas), não podemos jogar os dois ao mesmo tempo, digo, não há como misturar as estruturas.

A não ser que se queira construir uma estrutura híbrida, mas então, como na biologia, corremos o risco de gerar um produto estéril.

Por oportuno, observe mais uma vez que o que confere a *identidade* de um elemento é a estrutura (jogo) no qual ele está inserido. Por exemplo, o bispo perderia seu status no jogo de dama, seria rebaixado a uma mera “pedra”.

Um símile: é como se fosse um mesmo ator desempenhando dois pápeis em duas novelas exibidas em horários distintos, não podemos por isto confundir as personagens.

Ademais, se optarmos por jogar dama é bem verdade que uma certa peça possa ser “pensada” como uma torre (inclusive por se “parecer” com uma torre) mas não vejo em que este “pensar” possa contribuir para o jogo de dama.

> “Não sem algum denôdo − e deleite, tenho tentado cultivar em meu espírito uma pequena nesga de iconoclastia.” (Gentil)

4.3 Como construir um sistema (“conjunto”) numérico?

No nosso entendimento existem duas alternativas. Primeira: seguindo a definição 2, dada acima, tomamos um conjunto **E** e definimos duas operações, $+$ e $\cdot$, sobre o mesmo. Ao cabo, temos um sistema numérico: $(\mathbf{E}, +, \cdot) = \mathbb{E}$. Observe que este foi, precisamente, o procedimento do segundo autor ao construir os números complexos, perfeito!

Observe que, nesta alternativa, não nos preocupamos com as possíveis propriedades a que estas operações, por ventura, venham a satisfazer. Eventuais propriedades deverão ser exibidas a posteriori.

Numa segunda alternativa, listamos − a priori − um conjunto de propriedades* que devem ser satisfeitas pela estrutura que pretendemos crear, em seguida só nos resta encontrar um conjunto, definir duas operações e − a posteriori − mostrar que todas as propriedades requeridas são satisfeitas.

Isto foi o que *tentou* o primeiro autor ao “definir” números complexos.

Agora iremos cumprir nossa promessa e mostrar (exemplificar) que um mesmo sistema numérico pode ser erigido sobre vários conjuntos.

Para o nosso desiderato consideremos o seguinte conjunto:

$$\mathbf{C} = \{\, a + bi : \; a \in \mathbb{R} \;\text{ e }\; b \in \mathbb{R} \,\}$$

Uma observação pertinente: o símbolo $+$ em $a + bi$ não significa *adição*; não é necessário − de momento − que haja algum significado para este símbolo; o que nos interessa são os *elementos*, $a + bi$, do conjunto **C**.

Vamos tomar dois elementos, $a + bi$ e $c + di$, de **C** para dar três definições importantíssimas:

a) *igualdade:*

$$\boxed{a + bi = c + di \quad \Leftrightarrow \quad a = c \;\text{ e }\; b = d}$$

*Estas são as “especificações” as quais nossa nova estrutura deve satisfazer.

b) *adição:*

$$\boxed{(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i} \tag{1}$$

c) *multiplicação:*

$$\boxed{(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ac+bd)i} \tag{2}$$

2. Definição (D1.)′

Chama-se *sistema dos números complexos*, e representa-se por $\mathbb{C}'$, à seguinte terna: $(\mathbf{C},\,+,\,\cdot)=\mathbb{C}'$.

Adendo: Antes de prosseguir em nossos argumentos uma observação: Em matemática existe uma convenção tácita de que só devemos criar novos símbolos em casos estritamente necessários. Em consequência deste acordo é que em muitos contextos matemáticos um mesmo símbolo pode ter significados distintos. Por exemplo, na definição a seguir:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

os símbolos $+$ (na cor azul) são os mesmos e, como dissemos, não é necessário que tenham algum significado*. O símbolo $+$ (na cor vermelha) significa a adição no conjunto $\mathbf{C}$ e o símbolo $+$ (verde) significa a adição usual nos $\mathbb{R}$eais.

Agora envidaremos esforços no sentido de responder à pergunta: *O que estes números complexos têm a ver com os números complexos definidos via pares ordenados*? serão os mesmos?

Em símbolos,

$$\left.\begin{array}{l}\mathbb{C}=(\mathbf{R}^2,\,+,\,\cdot)\\[4pt] \mathbb{C}'=(\mathbf{C},\,+,\,\cdot)\end{array}\right.\quad\overset{?}{\Longrightarrow}\quad\mathbb{C}=\mathbb{C}'$$

Com o objetivo de responder a pergunta acima consideremos a seguinte aplicação,

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C}' & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ & a+bi & \longmapsto & (a,\,b)\end{array}$$

entre estruturas.

Então, inicialmente observemos que f é bijetora pois:

(i) todo par $(a,\,b)\in\mathbb{C}$ é o correspondente, segundo f, de $a+bi\in\mathbb{C}'$ (isto implica em que, f é sobrejetora);

(ii) Dados $a+bi\in\mathbb{C}'$ e $c+di\in\mathbb{C}'$, com $a+bi\neq c+di$, os seus correspondentes

*Pelo ao menos para definirmos as operações (1) e (2)

$(a,\, b) \in \mathbb{C}$ e $(c,\, d) \in \mathbb{C}$ são distintos, tendo em conta as definições de igualdades nas respectivas estruturas. (isto implica em que f é injetora).

Em seguida, notemos que f preserva as operações de adição e multiplicação, no seguinte sentido:

$$\begin{aligned} f\big(\,(a+bi)+(c+di)\,\big) = f\big(\,(a+c)+(b+d)i\,\big) &= (a+c,\, b+d)\\ &= (a,\, b)+(c,\, d)\\ &= f(\,a+bi\,)+f(\,c+di\,) \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} f\big(\,(a+bi)\cdot(c+di)\,\big) = f\big(\,(ac-bd)+(ad+bc)i\,\big) &= (ac-bd,\, ad+bc)\\ &= (a,\, b)\cdot(c,\, d)\\ &= f(\,a+bi\,\big)\cdot f\big(\,c+di\,) \end{aligned}$$

Devido ao fato de existir uma aplicação bijetora $f : \mathbb{C}' \longrightarrow \mathbb{C}$ que preserva as operações de adição e multiplicação, dizemos que $\mathbb{C}'$ e $\mathbb{C}$ são isomorfos.

Devido ao isomorfismo, operar com $a+bi$ leva a resultados análogos aos obtidos operando com $(a,\, b)$; isto justifica a igualdade:

$$a+bi=(a,\, b)$$

Uma observação trivial, embora pertinente, é que esta igualdade se dá entre números de duas estruturas e não entre elementos de dois conjuntos. De outro modo,

$$a+bi \in \mathbb{C}' = (\mathbf{C},\, +,\, \cdot) \;\text{ e }\; (a,\, b) \in \mathbb{C} = (\mathbf{R}^2,\, +,\, \cdot) \;\;\Rightarrow\;\; a+bi=(a,\, b),$$

Por outro lado,

$$a+bi \in \mathbf{C} \;\text{ e }\; (a,\, b) \in \mathbf{R}^2 \;\;\Rightarrow\;\; a+bi \neq (a,\, b).$$

Conclusão: Mostramos que $a+bi$ e $(a,\, b)$ são, ambos, números complexos legítimos, ao contrário do que se pode deduzir de "pode ser pensado".

Adendo: Duas estruturas isomorfas diferem apenas na natureza de seus elementos, mas não nas "regras do jogo".

Observe as operações nos dois sistemas:

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathbb{C}'} & & \underline{\mathbb{C}} \\ (2+3i)+(1-i)=3+2i & \xrightarrow{\;f\;} & (2,\,3)+(1,\,-1)=(3,\,2) \\ (2+3i)\cdot(1-i)=5+i & \xleftarrow[\;f^{-1}\;]{} & (2,\,3)\cdot(1,\,-1)=(5,\,1) \end{array}$$

– Dissemos, em nossa análise das definições de números complexos, que a definição em [1] é perdulária e esotérica. Com efeito, as exigências de **(1)** a **(5)** (pág. 2) decorrem todas da definição (**D1**.)$'$, bem como a existência de um complexo i tal que $i^2 = -1$.

– Faremos agora o papel do advogado do diabo. Poderia-se argumentar: Na definição **D1**. o autor opta por assumir as propriedades de **(1)** a **(5)**, bem como a existência de um complexo i tal que $i^2 = -1$ e, destes postulados, deduz as regras das operações dadas em (1) e (2) (pág. 10); na definição (**D1**.)$'$ sucede o contrário: as regras (1) e (2) são impostas e se deduz as regras das operações e a existência de um complexo i tal que $i^2 = -1$; isto não seria apenas uma mera questão de preferência? E mais, a definição **D1**. não é mais consoante ao desenvolvimento histórico dos números complexos?

O que estou defendendo é que com uma pequena mudança de perspectiva podemos nos manter fiéis ao desenvolvimento histórico e ao mesmo tempo não sermos perdulários e esotéricos (e ainda ganhamos em clareza).

Com efeito, vamos partir da impossibildade de resolvermos, nos reais, a equação $x^2 + 1 = 0$. Pois bem, precisamos ampliar os números reais de modo que a equação anterior possa ser resolvida; isto é, devemos construir um novo sistema numérico que atenda dois requisitos: deve "conter" os reais e deve existir um número i tal que $i^2 = -1$.

Pois bem, através da definição (**D1**.)$'$ atingiremos estes requisitos. Quanto a estarmos postulando a regra de multiplicação (2), não estamos sendo esotéricos (místicos) porquanto basta dizer aos alunos que ela foi o resultado de décadas de intensos esforços de eminentes matemáticos.

– Volto a insistir, novamente, que indepentemente da definição que se escolha; digo, se escolhemos definir número complexo como um par ordenado (a, b) devemos mostrar que $a + bi$ também é um legítimo número complexo e, ao contrário, se escolhemos definir $a + bi$ como um número complexo então devemos provar* que (a, b) também é um legítimo número complexo, e não que "pode ser pensado como um número complexo". Por sinal, do ponto de vista da lógica nem um dos sistemas, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{C}'$, é mais legítimo que o outro, ambos gozam do mesmo status lógico. Ainda, qualquer que seja a definição adotada $a + bi$ "não é mais, nem menos" número complexo que (a, b).

Adendo: Amiúde se traduz a igualdade complexa:

$$i^2 = -1 \tag{3}$$

como: "nos complexos existe um número cujo quadrado é negativo". Vamos argumentar no sentido de mostrar que isto não é verdade. Digo, nos complexos *não existe* nenhum número cujo quadrado seja negativo. De fato, se nos complexos não contamos com uma ordem então não podemos afirmar que -1 seja negativo; o símbolo "$-$", que antecede o 1, significa tão somente o "oposto" e não "negativo". De uma outra perspectiva, a rigor a igualdade (3) se escreve assim,

$$i^2 = (-1,\, 0)$$

e $(-1,\, 0) = -(1,\, 0) = -1$ não é negativo, é simplesmente o oposto de 1.

-1 é negativo nos reais, não nos complexos.

*Tal como o fizemos anteriormente.

Creio não estar sendo intempestivo

Alguém poderia argumentar que, afirmar que os matemáticos ainda hoje titubeiam quanto ao conceito de número é ser − no mínimo − intempestivo, e que os argumentos arrolados nesta dissertação não são suficientes para uma assertiva de tão grande calibre.

Certo. Acontece que não é de hoje esta minha suspeita; com efeito o que mais pesa em defesa de minha tese é a interpretação que os matemáticos conferem à igualdade $0,999\ldots = 1$. De fato, desta igualdade os matemáticos concluem que $0,999\ldots$ é um número, no caso igual a 1. No artigo [6] provamos que também podemos ter $0,999\ldots = 0$ (não, não trata-se de um erro de digitação!); e agora José? Em função deste achado minha conclusão é a de que $0,999\ldots$ não pode ser um número; tão somente uma representação decimal, ou, se quisermos, uma série. Este é o maior argumento para minha crença de que os matemáticos hodiernos, quanto ao entendimento do que seja um número, estão "`tropeçando ao meio dia, como se fosse no crepúsculo.`"

> "Finalizando, desejo exprimir a esperança de que . . . a matemática possa servir agora como modelo para a solução de muitos problemas de nossa época: revelar um objetivo religioso supremo e avaliar o significado da atividade espiritual da humanidade." (I.R. Shafarevitch)

Referências

[1] Carmo, Manfredo Perdigão do, et alii, *Trigonometria/Números complexos*. Rio de Janeiro − IMPA/VITAE, 1992.

[2] Fundamentos de matemática elementar (por) Gelson Iezzi (e outros) São Paulo, Atual Ed., 1977 (vol. 6)

[3] Silva, Gentil Lopes. *Os Números Azuis*. www.dmat.ufrr.br/gentil, 2008.

[4] Silva, Gentil Lopes. `Números Hipercomplexos`−$2D$ (`Uma Nova Generalização dos Números Reais`) www.dmat.ufrr.br/gentil, 2008

[5] Ávila, Geraldo Severo de Souza, *Introdução a Análise Matemática*. São Paulo: Editora Edgard Blücher,1993 .

[6] Silva, Gentil Lopes. *Palestra:* $0,999\ldots = 1\,?$ www.dmat.ufrr.br/∼ gentil, 2008.