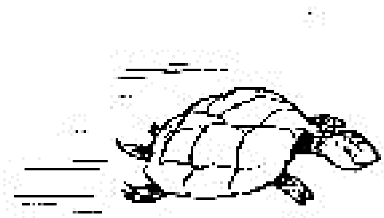
PARADOXO DE ZENÃO

Aquiles e a Tartaruga… ad infinitum!

NASCIMENTO-TEIXEIRA, Bernardo D. | Dezembro 2015



O recurso com pompa e circunstância de expressões latinas fica-nos sempre bem! E hoje é disso que vamos tratar… Trago-vos, então, uma dessas expressões: *ad infinitum*. Facilmente conseguimos perceber que falamos do famoso 8 deitado!

Uma das palavras mais difíceis de definir será, talvez, esta: *infinito*! Mas para começarmos vamos definir como algo que não tem fim, ou seja, incomensurável.

Zenão, filho de Teletágoras, nasceu por volta de 490 a.C. na atual Itália. Considerado o pai da Dialética, filósofo pré-socrático, destacou-se também na matemática e na política, conforme era habitual nesta época a exploração de várias áreas, mesmo distintas que fossem.

Propôs então a seguinte situação: Imagine o leitor uma corrida, repare bem… entre o herói Aquiles e uma Tartaruga. Enraizado na tradição popular, a lenta tartaruga não teria qualquer hipótese face ao herói. Zenão, piedoso com a tartaruga, decide invalidar este conhecimento popular, dando-lhe algum avanço face a Aquiles no início da partida. A Tartaruga, iniciando com alguma vantagem face a Aquiles, começa a corrida numa posição mais à frente, ocupando respetivamente as posições T_1 e A_1. Inicia-se a partida! Aquiles atinge a posição T_1 e a Tartaruga atingirá uma posição T_2. Passado uns instantes Aquiles atingirá a posição T_2, contudo a Tartaruga estará mais à frente em T_3. Repetindo-se *ad infinitum*.

Zenão prevê com esta idílica narrativa que a Tartaruga ganhará sempre a partida. É legítimo que nos questionemos como… Vejamos novamente! A Tartaruga parte com um avanço definido $|T1 - A1|$ m. Quando Aquiles, que partiu mais atrás, alcança T_1, a Tartaruga já atingiu T_2, pois partiram no mesmo instante. Quando Aquiles atinge T_2, a Tartaruga já se encontra mais à frente T_3. E assim, *ad infinitum*…

Vamos quantificar o nosso caso! Suponhamos que Aquiles e a Tartaruga se movem com velocidades de 10 m/s e 1 m/s respetivamente, e que a Tartaruga partiu 10 m à frente de Aquiles. Sabemos então que no instante em que Aquiles atingirá a posição inicial da Tartaruga, T_1, esta estará numa posição T_2 que é igual a 11 m, pois move-se 1 m em cada segundo. A distância agora entre os concorrentes é de 1 m. Então, Aquiles atingirá a posição T_2 ao fim de 0,1 s, em paralelo a tartaruga atinge a posição T_3 que dista da posição A_1 11,1 m.

Sejamos francos, já com esta informação… tanto o leitor, como eu, sabemos que a Tartaruga tem a sua vitória arruinada!

Contudo, a lógica de Zenão propõe-nos um estudo da Série Geométrica, especialmente da sua soma.

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}=\frac{1}{10^0}+\frac{1}{10^1}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{10^n}\text{, } n\in\mathbb{N}$$

A soma desta Série Geométrica do Paradoxo de Zenão (***S_{PZ}***) é dada por definição pelo seguinte quociente:

$$\boldsymbol{S_{PZ}}=\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=\frac{10}{9}$$

Assim, conseguimos ver que em $\frac{10}{9}$ m, correspondente a $\simeq$1,2 segundos, para a Tartaruguinha ser ultrapassada, dado pela Soma S_{PZ} da série que definimos! Por outras palavras, a série é convergente, isto é, tem limite finito. Pois calculando o limite de ***S_{PZ}*** verificamos facilmente que dará o mesmo valor, pois o limite de uma constante é a própria constante! Desta vez não podemos culpar o seu calcanhar ou mesmo a calmaria do mar negro… Pois irá ganhar a corrida, se esta for superior à distância calculada.

Citando o próprio Zenão: "O que se move deve sempre alcançar o ponto médio antes do ponto final".

O Paradoxo é mesmo isso. Tem alguma piada e faz sentido, mas não corresponde à realidade. Etimologicamente *para + doxa* significa opinião contrária.

Cada vez que trato do aquário das minhas duas tartarugas nunca as deixo à solta pela casa, senão… nunca mais as apanho… não vá o Paradoxo de Zenão verificar-se!! Não as subestimemos…

BIBLIOGRAFIA

http://plato.stanford.edu/entries/paradox-zeno/, consultado a 26 dezembro 2015.

Byrd, D., 2012, Zeno's "Achilles and the Tortoise" Paradox and The Infinite Geometric Series.

Apostol, T., 1967, Calculus, One variable Calculus with an introduction to Linear Algebra. Indiana University, Vol 1, Ed 2.

Smith, D. *Blog*, publ 2002, Affordable Housing Institute, developing affordable housing ecosystems worldwide. consultado a 26 dezembro 2015. (Figura retirada)