Universidade Estadual da Paraíba
Centro de Ciências e Tecnologia
Departamento de Matemática e Estatística
Bacharelado em Estatística

Campina Grande - PB
Dezembro/2004

Universidade Estadual da Paraíba
Centro de Ciências e Tecnologia
Departamento de Matemática e Estatística
Bacharelado em Estatística

Introdução a Teoria da Probabilidade

Trabalho acadêmico orientado(TAO) para obtenção do título de bacharelado em Estatística pela Universidade Estadual da Paraíba.

Romero Alves Guimarães
Matrícula 98109221-7

Campina Grande-PB
14/12/2004

Parecer do orientador e dos examinadores

Prof. Examinador
Examinador

Prof. Examinador
Examinador

Juarez Fernandes de Oliveira
ORIENTADOR

Sumário

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus pelo o fato de existir e conseguir realizar um dos meus maiores sonhos.

A meu pai Reginaldo Guimarães , que nunca mediu esforços em me apoiar na parte financeira.

A minha mãe Maria de Fátima que é sem duvida a grande responsável pôr tudo que sou hoje.

A Meu orientador Professor Juarez Fernandes de Oliveira, que me ajudou muito na parte teórica desse trabalho.

A Meus professores e ex-professores, em especial a Juarez Fernandes, João Gil, Alba Brasão.

A meus companheiros de curso,enfim a todos aqueles que contribuíram de alguma forma.

Introdução a Teoria da Probabilidade

Romero Guimarães

28 de dezembro de 2004

1 Introdução

A teoria da probabilidade é um ramo da matemática relacionado com fenômenos aleatórios(casuais). Há um grande interesse em seu estudo devido ao grande número de aplicações bem sucedidas em muitas áreas, das ciências físicas, biológicas e sociais na engenharia e no mundo de negócios.

Este trabalho visa principalmente evidenciar os conceitos básicos de probabilidade, o qual são de extrema importância para a formação do estatístico.

Muitas vezes antes de sair nos perguntamos: será que vai chover? De um modo ou de outro atribuímos um valor à chance de chover e então decidimos um tipo de roupa e se levaremos ou não guarda-chuva conosco.

A teoria da probabilidade esta presente em muito mais setores do que possamos imaginar, portanto, podemos pensar uma série de outras situações em que nos deparamos com incerteza quanto à ocorrência ou não de um determinado fenômeno.

1.1 Modelos Matemáticos

Vamos examinar a princípio o que seria um modelo determinístico, ou seja um modelo no qual as condições sob as quais o experimento seja executado determinem o resultado do experimento. Como por exemplo a lei de Ohm, se introduzirmos uma bateria num circuito simples, o modelo que revela o valor de I e tão logo os valores de E e R sejam fornecidos é dado por: $I = E/R$.

Para um grande números de situações o modelo apresentado acima "determinístico", é suficiente contudo existem situações que requerem um modelo diferente, esses modelos são denominados, modelos não-determinísticos ou probabilísticos ou ainda modelos estocásticos.

Se lançarmos uma moeda 1000 vezes, as ocorrências de caras e coroas se alternam de formas aparentimente irregular ou imprevisível, não existe nenhum modelo matemático que nos possa afirmar que face da moeda estará voltada pra cima no 100^o lançamento. São fenômenos desse tipo que consideramos como sendo aleatório e que constituem o objetivo de nosso estudo.

O objetivo da probabilidade é criar modelos capazes de representar os fenômenos aleatórios.

2 Modelo probabilístico para um experimento

definição 2.1 (Experimento) *Chamaremos de experimento ou de fenômeno qualquer processo que permite ao pesquisador fazer observações.*

definição 2.2 (Experimento Aleatório) *É aquele que repetido em condições idênticas produz geralmente resultados distintos. Por exemplo jogar uma moeda não viciada, sabemos que a chance de sair cara é de 1/2 , mas não conseguimos prever com exatidão o resultado da n-ésima jogada, mesmo controlando todas as circunstâncias relevantes ao experimento (jogar a moeda).*

definição 2.3 (Evento) *É simplesmente um conjunto de resultados possíveis. Na termologia dos conjuntos, um evento é um subconjunto de um espaço amostral Ω. Geralmente denotado por uma letra maiúscula.*

definição 2.4 (Evento Mutuamente Excludente) *Dois eventos A e B são denominados mutuamente excludentes, se eles não puderem ocorrer juntos. Ou seja $A \cap B = \emptyset$ isto é, a intersecção de A e B é o conjunto vazio.*

Quando o espaço amostral for finito ou infinito numerável, todo subconjunto poderá ser considerado um evento. Se Ω, contiver n elementos, existirão exatamente 2^n subconjuntos (eventos).

Uma das características fundamentais de "'experimento", como foi apresentado na definição 3.2, é que nós não sabemos qual resultado particular ocorrerá quando o experimento for realizado. Em outras palavras, se A for um evento associado a um experimento, então, não poderemos afirmar com certeza que A irá ocorrer ou não. Por isso, torna-se muito importante tentar associar um número ao evento A, o qual medirá de alguma maneira quão verossímel é que o evento A venha a ocorrer. Essa tarefa nos leva à teoria da probabilidade.

Suponhamos que um experimento seja realizado sob certas condições fixas. Seja Ω o conjunto dos resultados possíveis, onde por "resultado possível"entende-se resultado elementar e indivisível do experimento. Ω será chamado espaço amostral do experimento. Por exemplo:

exemplo 2.5 *Jogar um dado equilibrado e observar a face voltada pra cima. É claro que $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, pois esses são os únicos seis resultados possíveis. 'Numero par' por exemplo, não é um resultado elementar, pois consiste dos 3 resultados 2,4,6).*

As vezes, o conjunto de resultados possíveis não é tão fácil de ser definido, como por exemplo:

exemplo 2.6 *Selecionar ao acaso um habitante de Campina Grande e medir sua altura em metros. Qual os resultados possíveis desse experimento? Números reais entre 0 e? Supondo que não exista uma altura máxima talvez seja razoável fazer $\Omega = (0, \infty)$, é obvio que esse conjunto contem resultados impossíveis, tais como um bilhão ou um milhão de metros, mas o importante é que Ω contenha todos os resultados possíveis por isso vamos supor:*

1. *A todo resultado possível corresponde um e somente um, ponto $\omega \in \Omega$*
2. *Resultados distintos correspondem a pontos distintos em Ω, e ω ? não pode representar mais de um resultado.*

3 Definição Clássica de Probabilidade

Seja A um evento e Ω um espaço amostral e se $A \subset \Omega$ Defini-se probabilidade de A por:

$$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} \tag{1}$$

Onde Car(A) é o número de resultados favoráveis ao evento A, e Card(Ω) é o número de resultados possíveis e igualmente prováveis. A probabilidade assim estabelecida, é uma função definida na classe dos eventos ou, o que é equivalente, na classe dos subconjuntos do espaço amostral e satisfaz as propriedades:

1. $P(A) \geq 0$,para todo $A \in \Omega$
2. Se A e B são eventos quaisquer, então: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
3. $P(\Omega) = 1$
4. Se A e B são eventos mutuamente exclusivos, então: $P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

3.1 Críticas a Definição Clássica

- A definição clássica é dúbia, já que a idéia de 'igualmente provável' é a mesma de 'com probabilidade igual', isto é, a definição é circular, porque está definindo essencialmente a probabilidade com seus próprios termos.
- A definição não pode ser aplicada quando o espaço amostral é infinito.

4 Definição Freqüêntista de Probabilidade

Ao concluirmos que um evento é aleatório, desejamos poder atribuir ao mesmo um numero que reflita suas chances de ocorrência quando o experimento é realizado. Em determinadas circuntancias podemos atribuir a mesma chance a todos os eventos simples associados ao experimento. Quando o número de eventos simples do espaço amostral não for finito, esta possibilidade fica afastada. Seja E um experimento e A um evento de um espaço amostra associado a Ω. Suponhamos que E é repetido "n"vezes e seja frA a freqüência relativa do evento. Então a probabilidade de A é definida como sendo o limite de frA quando "n"tende ao infinito. Ou seja:

$$P(A) = \lim_{x \to \infty} frA \tag{2}$$

proposição 4.1 *A freqüência relativa fn, A definida na classe dos eventos do espaço amostral Ω satisfaz as seguintes condições:*

- *Para todo evento A, $0 \leq fn, A \leq 1$;*
- *Se A e B são dois eventos de Ω mutuamente excludentes, temos:* $f_{n,A \cup B} = f_{n,A} + f_{n,B}$;
- $f_{n,\Omega}$=*1*

4.1 Crítica à definição freqüencial

Esta definição, embora útil na prática, apresenta dificuldades matemáticas, pois o limite pode não existir. Em virtude dos problemas apresentados pela definição clássica e pela definição freqüencial, foi desenvolvida uma teoria moderna, na qual a probabilidade é um conceito indefinido, como o ponto e a reta o são na geometria.

5 Definição Axiomática de Probabilidade

Tomaremos uma coleção não vazia F de subconjuntos de Ω, que representará a coleção de "eventos"aos quais desejamos associar probabilidades. Agora um evento significa por definição um conjunto A em F. Afirmação: O evento A ocorre, significa que o resultado do nosso experimento é representado por um ponto. Novamente do ponto de vista estritamente matemático, F é apenas uma coleção especificada de subconjunto do conjunto Ω. Serão associadas probabilidades apenas aos conjuntos, $A \in F$, isto é, eventos. O que deve ser a coleção F? É bom exigir que F seja fechado sob uniões finitas e intersecções finitas dos conjuntos em F ; bem como sob complementação. Dizer que o evento A não ocorre é dizer que o resultado do experimento não é representado por um ponto em A, de modo que ele deve ser representado por algum ponto em A^c. Não poderíamos falar em probabilidade de A sem falar na probabilidade de A^c.

Logo F deve ser uma coleção não vazia de subconjuntos de subconjuntos de Ω com as seguintes propriedades:

1. $\Omega \in F$ (definiremos P(Ω=1).
2. Se A$\in F$, então $A^c \in F$.
3. Se A$\in F$ e B$\in F$, então A U B $\in F$(e se atribuirmos uma probabilidade a A e outra a B, então atribuirmos uma probabilidade a "A ou B").

corolário 5.1 *Seja Ω um conjunto não-vazio. Uma classe F de subconjuntos de Ω satisfazendo 1,2,3 é chamada álgebra de subconjuntos de Ω.*

Vamos supor que a classe dos eventos aleatórios também satisfaçam: A3'.
$A'_3 \Rightarrow$ Se $A_n \in F$ para n=1,2,3...., então: $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in F$.

teorema 5.2 *Uma classe F de subconjuntos de um conjunto não-vazio Ω satisfazendo 1, 2 e A3' é chamada σ-álgebra de subconjuntos de Ω.*

exemplo 5.3 *Seja* $F_1 = \{\phi, \Omega, \{1\}, \{2,3\}\}$ *e* $F_2 = \{\phi, \Omega, \{1\}, \{2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$
Seriam ambas sigma-àlgebra?
Para provar que as duas coleções de eventos são sigma-àlgebra elas devem satisfazer as três propriedades acima 1, 2, A3'.As duas classes de eventos contem omega logo a primeira propriedade esta satisfeita.
Vamos agora verificar a segunda propriedade:

Observe que os complemetares dos elementos de F_1 *estão todos em* F_1.

$$\phi^C = \Omega, \qquad \Omega^C = \phi, \qquad \{1\}^C = \{2,3\}, \qquad \{2,3\}^C = \{1\}$$

Logo F_1 *satisfaz a* 2^0 *propriedade, como também* F_2

Para verificar A3' observamos que, como o número de elementos em cada coleção é finito, então basta verificar se todas as uniões com seus elementos também pertencem a coleção. A união com vazio é inócua e com Ω *resulta no própio* Ω*, logo vamos nos preocupar com as demais uniões que poderiam não pertencer a coleção.*
Para F_1 *temos:*

$$\{1\} \cup \{2,3\} = \Omega \in F_1.$$

E portanto A3' para F_1 *é satisfeita, então a coleção de eventos* F_1 *é sigma-àlgebra.*
Para F_2 *temos:*

$$\{1\} \cup \{2\} = \{1,2\} \notin F_2$$

Logo, F_2 *não forma uma sigma-àlgebra.*

definição 5.4 *Uma medida de probabilidade P, sobre uma* σ*-àlgebra de um subconjunto F de um conjunto* Ω*, é uma função* $P : F \to [0,1]$ *que satisfaz as seguintes probabilidades:*

1. $P(\Omega) = 1$.
2. $P(A) \geq 0$ *para todo* $A \in F$
3. *Se* A_n*, n=1,2,3,...,; São conjuntos mutuamente disjuntos em F, então:* $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

definição 5.5 *Um espaço de probabilidade é um trio*(Ω, F, P)*,onde:*

- Ω *é um conjunto não vazio;*
- F *é uma* σ*-álgebra de subconjuntos de* Ω*;*
- P *é uma probabilidade em* F

A partir de agora, tudo será estudado em espaços de probabilidade, apesar de mantermos a linguagem de experimentos e eventos.

exemplo 5.6 *Suponha que se lance três moedas idênticas e perfeitas equilibradas. Identifique* (Ω, F, P)

$\Omega = \{ccc, cc\overline{c}, c\overline{c}c, c\overline{cc}, \overline{c}cc, \overline{c}c\overline{c}, \overline{cc}c, \overline{ccc}\}$
$F = P\,(\Omega)$= Conjunto das Partes.
Como Ω é finito, vamos supor que seus pontos são equiprováveis. Desta forma:

$\forall \omega \in \Omega, P(\omega) = \frac{1}{8}$
Logo,$\forall A \in F, P(A) = \frac{CARD(A)}{8}$.

Considerando que a enumeração dos elementos relativo a um evento pode surgir de várias maneiras, apresento a título de ilustração, uma das alternativas mais comuns em estatística, isto é, a obtenção de amostras, sob vários aspectos.

definição 5.7 *Uma amostra de tamanho n de um conjunto C que tem N elementos é um subconjunto de n elementos retiradas de C.*

As amostras podem ser retiradas de duas maneiras: com reposição ou sem reposição. Nas amostras retiradas com reposição cada elemento selecionado é reposto no conjunto no conjunto antes da próxima retirada. No caso de amostras sem reposição, como o nome o elementos são repostos após cada retirada.

Os elementos poderão ainda ser ordenados ou não.

definição 5.8 *Uma amostra é dita ordenada se duas amostras com os mesmos elementos porém em ordens distintas, forem diferentes.*

exemplo 5.9 *Considere um grupo de alunos do curso de estatística da UEPB, que desejam formar um conselho com três estudantes, um presidente, um secretário, e um tesoureiro. Ao escolhermos uma amostra de três estudantes para formarem um conselho, deveremos considerar as amostras ordenadas, pois ainda que duas amostras sejam formadas pelas mesmas pessoas, se elas executam tarefas distintas, as amostras devem ser consideradas diferentes.*

As amostras não ordenadas sem reposição, de tamanho n de um conjunto com N elementos, são denominadas na maioria dos textos elementares de probabilidade ou de combinatória de combinações de N elementos tomados n a n. Quando não for estabelecida nenhuma qualificação, estaremos admitindo que os elementos são todos distintos e que a amostra é não ordenada. As amostras ordenadas sem reposição são denominadas arranjos.

Vamos agora determinar o número de amostras de cada tipo.

proposição 5.10 *O número de amostras ordenadas sem reposição de tamanho n, de um conjunto com N elementos, que será denotado por* $A_{N,n}$ *ou* $(N)_n$*, é dado por:*

$$(A)_{N,n} = N(N-1)\ldots(N-n+1)$$

exemplo 5.11 *No exemplo 5.9 o número de maneiras que o conselho pode ser formado é igual ao número de amostras ordenadas sem reposição de tamanho 3 de um conjunto de 20 elementos. Pela proporção 5.10 temos:*

$$(A)_{20,3} = 20.19.18 = 6840$$

proposição 5.12 *O número de amostras com reposição de tamanho n, de um conjunto com N elementos é igual a* N^n.

exemplo 5.13 *Suponha que a data de nascimento de qualquer pessoa pode ser considerada igualmente distribuída entre 365 dias de um ano. Se em uma sala existem n pessoas, qual é a probabilidade de que todas tenham nascido em dias diferentes?*

Denotemos por A esse evento. O número de conjuntos de n dias em que nasceram as n pessoas é igual ao número de amostras ordenadas com reposição de tamanho n de um conjunto com 365 elementos , que é igual a 365^n. *Datas distintas de nascimento das n pessoas correspondem a amostras ordenadas sem reposição de tamanho n de um conjunto com 365 elementos, cujo número é* $(365)_n$. *Assim:*

$$P(A) = \frac{(A)_{365,n}}{365^n} \tag{3}$$

6 Independência

Dado um espço de probabilidade(Ω, F, P), dois eventos A e B são definidos como independentes se $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Uma coleção de eventos $\{F_i; i = 0, 1, ..., k-1\}$é dita independente ou mutuamente independente se para qualquer subcoleção distinta $\{Fl_i; i = 0, 1, ..., m-1\}$, $l_m \leq k$,tivermos isto:

$$P(\bigcap_{i=0}^{m-1} Fl_i) = \prod_{i=0}^{m-1} P(Fl_i) \tag{4}$$

definição 6.1 (eventos mutuamente independentes) *Diremos que três eventos A,B e C são mutuamente independentes se, e somente se, todas as condições seguintes forem válidas:*

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$, $\qquad P(A \cap C) = P(A)P(C)$
$P(B \cap C) = P(B)P(C)$, $\qquad P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$

Finalmente, generalizaremos esta noção para n eventos, na seguinte definição:

definição 6.2 *Os n eventos* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *serão mutuamente idependentes se, e somente se, tivermos para K= 2,3,...,n:*

$$P(Ai_1 \cap Ai_2 \ldots \cap Ai_k) = P(Ai_1)P(Ai_2)\ldots P(Ai_K) \tag{5}$$

E se qualquer subcoleção contendo pelo menos dois porém, menos que n eventos sejam mutuamente independentes.

7 Probabilidade Condicional

Considere uma caixa contendo r bolas vermelhas numeradas de 1 a r e b bolas pretas numeradas de 1 a b. Suponha que a probabilidade de extrair qualquer bola é $(b+r)^{-1}$. Se sabemos que a bola extraída é vermelha, qual a probabilidade de que seu número seja 1? Outra maneira de formular este problema é como segue. Seja A o evento de que a bola selecionada é vermelha e seja B o evento de que o número da bola selecionada é um. O problema então é determinar a probabilidade do evento B ter ocorrido, dado que o evento A ocorreu. Este problema não pode ser resolvido sem ter uma definição precisa da probabilidade condicional de um evento, dado um outro evento. Esta definição é a seguinte:

definição 7.1 *Seja (Ω, F, P) um espaço de probabilidade. Se $B \in F$ e $P(B) > 0$, a probabilidade condicional de A dado B é definida por:*

$$P(A \setminus B) = \frac{P(A \cup B)}{P(B)}, A \in F. \tag{6}$$

exemplo 7.2 *Considere o lançamento de duas moedas idênticas e perfeitamente equilibradas .*

1. Determine a probabilidade condicional de obter duas caras, dado que se obteve cara na primeira moeda.

2. Determine a probabilidade condicional de obter duas caras, dado que se obteve pelo menos uma cara.

Para resolver este problema tomamos o espaço de amostra Ω consistindo de quatro pontos HH, HT, TH, TT, cada um com probabilidade $\frac{1}{4}$. Seja A o evento e obter cara na primeira moeda e B o de obter cara na segunda. Para resolver(a) determinamos:

$$P(A \cap B \setminus A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Para resolvermos(b)determinamos:

$$P(A \cap B \setminus A \cup B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} = \frac{1}{4} \div \frac{3}{4} = \frac{1}{3}$$

8 Teorema da Probabilidade Total e Bayes

O conceito de probabilidade condicionada pode ser utilizado para calcular a probabilidade de um evento simples A ao invés da probabilidade de intersecção de dois eventos A e B. Para tanto é necessário o conceito de partição de um espaço amostral.

definição 8.1 *Diz-se que os conjuntos* $A_1, A_2, ..., A_n$ *eventos de um mesmo espaço amostral* Ω*, formam uma partição deste espaço, e conforme podemos visualizar na figura 1.1 loga abaixo, se:*

1. $A_i \cap A_j = \phi$, para todo $i \neq j$.
2. $A_1 \cup A_2 ... \cup A_n = \Omega$.
3. $P(A_i) \geq 0$, para todo i.

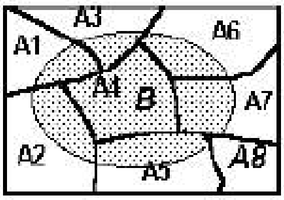

Figura 1: diagrama

exemplo 8.2 *Considere-se o espaço amostral obtido pelos números das faces no lançamento de um dado equilibrado e sejam os eventos:*
$A_1 = \{1, 2, 3\}, A_2 = \{4, 5\}$ *e* $A_3 = \{6\}$
Então, pode-se verificar facilmente que, os eventos acima formam uma partição do espaço amostral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

8.1 Teorema da probabilidade Total ou Absoluta

Considere-se um espaço amostral Ω e $A_1, A_2, ..., A_n$ uma partição desse espaço amostral. Seja B um evento de Ω. Então B pode ser escrito como (A figura 1, loga acima ilustra a partição com n=8):

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup ... \cup (B \cap A_n)$$

É claro que alguns destes conjuntos $B \cap A_j$, poderão ser vazios, mas isto não representa nenhum problema na decomposição de B. O importante é que todos os conjuntos $B \cap A_1, B \cap A_2, ..., B \cap A_n$, sejam dois a dois mutuamente excludentes. E por isso, pode-se aplicar a propriedade da adição de eventos mutuamente excludentes e escrever:

P(B)=$P\left[(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup ... \cup (B \cap A_n)\right] = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + ... + P(B \cap A_n)$

Mas cada um dos termos $P(B \cap A_j)$ pode ser inscrito na forma:
$P(B \cap A_j) = P(A_j).P(B/Aj)$, pela definição de probabilidade condicionada, obetem-se então o denomindado teorema da probabilidade total:

$$P(B) = \sum_i P(Ai)P(B \backslash A_i), \forall B \in F$$

exemplo 8.3 *Uma determinada peça é manufaturada por três fabricas A, B e C. Sabe-se que A produz o dobro de peça que B e que B e C produzem o mesmo número de peça. Sabe-se ainda que 2% das peças produzidas por A e B são defeituosa, enquanto que 4% das produzidas por C são defeituosas. Todas as peças produzidas são misturadas e colocadas em um depósito. Se do depósito for retirada uma peça ao acaso, qual a probabilidade de que ela seja defeituosa?*

Solução:
Considerem-se os seguintes eventos:
D={A peça é defeituosa};
A={A peça provém da fábrica A};
B={ A peça próvem da fábrica B};
C={A peça próvem da fábrica C}.

Tem-se então que P(A)= 50%, P(B)=P(C)= 25%, uma vez que so existe três fábricas e que a produz o dobro de peças de B esta por sua vez produz a mesma quantidade que C. Sabe-se que: P(D/A)=P(D/B)=2% e que P(D/C)=4%.
Pelo Teorema da Probabilidade Total pode-se escrever que:

P(D)= P(A).P(D/A)+P(B).P(D/B)+P(C).P(D/C)= 0,5.0,02+0,25.0,02+0,25.0,04 = 0,025, pois A, B e C formam uma partição do espaço amostral Ω

8.2 Teorema de Bayes

Suponha que no exemplo acima, uma peça é retirada do depósito e se verifica que é defeituosa. Qual a probabilidade de que tenha sido produzida pela fábrica A? ou B? ou ainda C?
Neste caso, o que se quer calcular é a probabilidade condicionada P(A/D).
Pela notação já vista acima, e generalizando a questão o que se está interessado em obter é a probabilidade de ocorrência de um dos A_i dado que B ocorreu, isto é, o que se quer é saber o valor de $P(A_i/B)$, onde os eventos $A_1, A_2, ..., A_n$ formam uma partição de Ω e B é um evento qualquer de Ω.
Aplicando a definição de probabilidade condicionada segue-se que:

$$P(A_i \backslash B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A_i \backslash B) = \frac{P(A_i)P(B \backslash A_i)}{\sum\limits_j P(A_j)P(B \backslash A_j)} \tag{7}$$

Esta é a *fórmula de Bayes*. Ela é util quando conhecemos as probabilidades dos A_i e a probabilidade condicional de B dado A_i, mas não conhecemos diretamente a probabilidade de B.

exemplo 8.4 *Considerando a pergunta acima vem então:*
P(A/D), isto é a probabilidade de ter sido produzida pela máquina A dado que a peça é defeituosa é:

$$P(A/D) = \frac{P(A).P(D/A)}{P(D)} = \frac{(0,02.0,50)}{0,5.0,02 + 0,25.0,02 +, 25.0,04} = 0,40 = 40\%$$

9 Metodologia

Foi feito uma pesquisa em livros nacionais, estrangeiros e apostilas de cursos de probabilidade ministrados em algumas universidades do Brasil, afim de se definir da melhor forma possível alguns tópicos e axiomas de probabilidade, será dada uma ênfase muito grande a conceitos básicos que muitas vezes passam despercebidos.

Um exemplo prático será utilizado para ilustrar cada definição sempre que possível.

10 Conclusão

O conceito de probabilidade nasceu associado a jogos de azar, em (1812), Laplace, em sua obra *Théorie Analitique des Probabilités*, além de abordar a teoria dos jogos, mostrou que a noção de probabilidade poderia ser utilizada na resolução de grande variedade de problemas. Essa consideração ficou ainda mais evidente no decorrer do século XIX.

Hoje, o uso generalizado e crescente da Teoria das Probabilidades se deve ao fato de ela fornecer os elementos práticos e teóricos para lidar com a incerteza, seja essa induzida pela ignorância parcial ou total ou mesmo da natureza intrínseca do fenômeno em estudo. Estamos habituados ao uso de noções de probabilidade nas mais diversas áreas do conhecimento: Biologia, Economia, Engenharias, Genética, Medicina, Psicologia etc. Com o advento dos tempos modernos cresce ainda mais os setores onde podemos aplicar a Teoria da Probabilidade, como nos esportes , na industria, a probabilidade hoje não se resume apenas a jogos de azar, mas de uma forma ou de outra a probabilidade se resume ao mundo em que vivemos.

11 Comentários

O livro do William Feller, An Introduction to Probability Theory and Its Applications, vol 1, é um clássico. Aos leitores que tenham seu interesse em aprofundar seus conhecimentos sobre probabilidade.

Feller introduz ao leitor teoremas e limites, passeios casuais e cadeias de Markov, trabalhando com espaços amostrais finitos.

O livro de Carlos A. B. Dantas é um ótimo livro aos estudantes que tenham interesse em começar o seu estudo sobre a teoria da probabilidade, Carlos Alberto, introduz o leitor com espaço discreto de probabilidade acessível ao estudante com conhecimento de matemática em nível de ensino médio . O livro também serve como um texto de probabilidade em nível intermediário já que ele também faz uma explanação em nível matemático servindo de ponte para outros livros mas avançados.

B. James traz tudo apresentado nos demais livros em um nível matemático mas avançado,sem contudo utilizar-se da teoria da medida e integração.

O livro do Meyer, é utilizado como livro texto em vários cursos de estatísticas aqui no Brasil, ele procura tirar um bom proveito da base matemática do leitor, sem ultrapassá-la, Paul L. Meyer,não só utiliza exemplos clássicos em probabilidade como, moedas, dados, mas procura colocar o estudante em contato com ilustrações mas adequadas da probabilidade, como por exemplo: A emissão de partículas a por uma fonte radioativa, amostragem de lotes, duração de vida de dispositivos eletrônicos e problemas relacionados com confiabilidade de componentes e de sistemas etc.

Referências Bibliográficas

[1] C.A DANTAS. Probabilidade: Um curso em nível introdutório. *São Paulo,EDUSP,2000.*, 1995.

[2] W. FELLER. An introduction to probability theory and application. *Aplicações a estatística*, 1967.

[3] Robert M. Gray and Lee Davison. An introduction to statistical signal processing. *Department of Electrical Engineering and Computer Science University of Maryland*, 2:460, 1999.

[4] R.V. HOOG. Pintroduction to mathematical statistics. *4 ed. New York, Macmillan Publishing.*, 1978.

[5] B. R. JAMES. Probabilidade: Um curso em nível intermediário. *Livros Técnicos e Científicos*, 1981.

[6] Paul L.Mayer. Probabilidade. *Aplicações a estatística*, 2:426, 1995.

[6, 2, 5, **?**, 4, 1, 3]