PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO USANDO O CÁLCULO DIFERENCIAL

Iritan Ferreira dos Santos
Universidade Federal do Rio Grande do Norte-UFRN
iritan-@hotmail.com
Marcos Gabriel Ferreira da Silva
Universidade Federal do Rio Grande do Norte-UFRN
marcosgabriel711@gmail.com
Dayenne Halley Gomes Bezerra
Universidade Federal do Rio Grande do Norte-UFRN
professorhalleygomes@gmail.com

Resumo: O objetivo deste estudo é abordar tópicos de otimização envolvendo o cálculo diferencial, tais como suas aplicações no dia-a-dia e em suas áreas específicas, desde conceitos básicos à problemas aplicados na geometria e economia. Mostramos que funções podem ser maximizadas, minimizadas e aplicadas de forma simples, bem como a sua importância em determinadas situações.

Palavras-chave: Cálculo Diferencial; Otimização; Máximos e Mínimos.

1. Introdução

Ao estudarmos o Cálculo Diferencial, uma das aplicações mais importantes são os problemas de otimização, onde devemos encontrar uma melhor maneira de fazer alguma coisa, maximizando ou minimizando uma determinada função (STEWART, 2014).

Estes tipos de problemas têm aplicações em diversas áreas do dia a dia como na Economia, por exemplo, quando as empresas querem minimizar os custos e maximizar os lucros, outro exemplo é quando o viajante quer minimizar o tempo gasto para ir de um lugar a outro.

Com isto apresentamos exemplos aplicados no cotidiano e problemas de otimização usando o Cálculo Diferencial. No decorrer deste artigo mostramos alguns problemas de como maximizar ou minimizar áreas, volumes e os lucros.

2. Conceitos Básicos

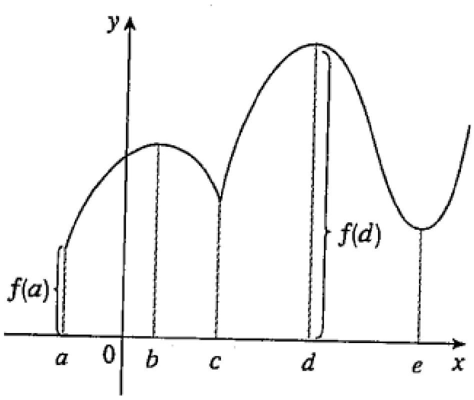
Vamos apresentar algumas definições, propriedades e exemplos a respeito de máximos e mínimos que precisamos para solucionar os problemas de otimização (STEWART, 2014); (HOFFMANN E BRADLEY, 2002).

Definição 2.1: Seja c um número no domínio D de uma função f. Então $f(c)$ é o

- Valor *máximo absoluto* de f em D se $f\ (c)\ \geq\ f\ (x)$ para todo x em D.
- Valor *mínimo absoluto* de f em D se $f\ (c)\ \leq\ f\ (x)$ para todo x em D.

Um máximo ou mínimo *absoluto* às vezes é chamado de máximo ou mínimo *global*. Os valores máximos e mínimos de f são chamados de valores extremos de f. Observe a Figura 1.

Figura 1: Extremos globais e locais



Fonte: Stewart (2014, p.248)

A Figura 1 mostra o máximo e o mínimo global, onde o máximo está localizado no ponto $(d, f(d))$ e o mínimo no ponto $(a, f(a))$, pois podemos observar que são os extremos da função, que são o ponto mais alto e o ponto mais baixo, respectivamente.

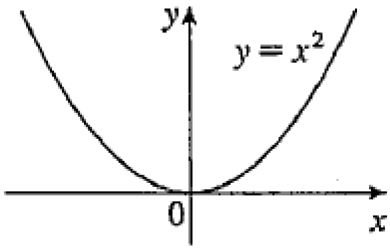
Na Figura 1, se restringirmos o intervalo (a, c), então $f\ (b)$ é o maior destes valores de $f\ (x)$ e é chamado o valor *máximo local* de f. De forma análoga, $f\ (c)$ é o *mínimo Local* de f, pois $f\ (c)\ \leq\ f\ (x)$ para todo x no intervalo (b, d). Em geral, segue a definição.

Definição 2.2: O número $f\ (c)$ é um

- Valor *máximo local* de f se $f\ (c)\ \geq\ f\ (x)$ quando x está próximo de c.
- Valor *mínimo local* de f se $f\ (c)\ \leq\ f\ (x)$ quando x está próximo de c.

Exemplo 2.1: Se $f(x) = x^2$, então, $f(x) \geq f(0)$, pois $x^2 \geq 0$ para todo x. Consequentemente, $f(0) = 0$, é o valor mínimo absoluto (e local) de f. Isso corresponde ao fato de que a origem é o menor ponto da parábola $y = x^2$. (Veja a Figura 2) Porém, não há um ponto mais alto sobre a parábola e, dessa forma, a função não tem valor um máximo.

Figura 2: O valor mínimo na origem, nenhum valor máximo



Fonte: Stewart (2014, p.249)

Definição 2.3: Um ponto crítico (número crítico) de uma função f é um número c no domínio de f tal que ou $f\,'(c) = 0$ ou $f\,'(c)$ não exista (STEWART, 2014).
Exemplo 2.3: Determine o ponto crítico de $f\ (x) = x^2 + 2x$.
Solução: Temos que,

$$f\,'(x) = 2x + 2$$

portanto, $f\,'(x) = 0$se $2x + 2 = 0$, ou seja, $x = -1$, assim o ponto crítico de $f(x)$ é -1, pois $f\,'(-1) = 0$.
Propriedade dos Valores Extremos: Cada um dos extremos absolutos de uma função $f(x)$ que seja contínua no intervalo fechado $a \leq x \leq b$ pode ocorrer em um dos pontos extremos do intervalo (a ou b) ou em um ponto c tal que $a < c < b$ (HOFFMANN E BRADLEY, 2002).

Hoffmann e Bradley (2002), afirmam que devido à está propriedade podemos localizar os extremos absolutos de uma função contínua no intervalo $[a, b]$ usando o método a seguir.

Como localizar os Extremos Absolutos de uma Função Contínua f no Intervalo $[a, b]$.

1° Passo: Encontre as coordenadas *x* de todos os pontos críticos de primeira ordem de *f* no intervalo $[a, b]$.

2° Passo: Calcule *f*(*x*) nestes pontos críticos e nos extremos do intervalo, $x = a$ e $x = b$.

3° Passo: Selecione o maior e o menor dos valores de $f(x)$ obtidos no passo anterior; eles são o máximo e o mínimo absoluto, respectivamente.

Vamos aplicar o método no exemplo a seguir.

Exemplo 2.2: Determine o máximo absoluto e o mínimo absoluto da função

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$$

no intervalo $-3 \leq x \leq 0$.

Solução: Calculando a derivada

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x + 2)(x - 1)$$

vemos que os pontos críticos de primeira ordem ocorrem em $x = -2$ e em $x = 1$. Destes pontos, apenas $x = -2$ está no intervalo $-3 \leq x \leq 0$. O passo seguinte é calcular $f(x)$ no ponto $x = -2$ e nos pontos extremos do intervalo, $x = -3$ e $x = 0$.

$$f(-2) = 13 \quad f(-3) = 2 \quad f(0) = -7$$

comparando esses valores, constatamos que o máximo absoluto de *f* no intervalo $-3 \leq x \leq 0$ é $f(-2) = 13$ e o mínimo absoluto é $f(0) = -7$.

Teste da Primeira Derivada para Valores Extremos Absolutos: Suponha que c seja um ponto crítico de uma função contínua em f definida em um certo intervalo (STEWART, 2014).

- $f'(x) > 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) < 0$ para todo $x > c$, então $f(c)$ é o valor máximo absoluto de f.
- $f'(x) < 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > c$, então $f(c)$ é o valor mínimo absoluto de f.

Teste da Derivada Segunda para Extremos Absolutos: Se uma função $f(x)$ é contínua no intervalo I e $x = c$ é o único ponto crítico neste intervalo (HOFFMANN E BRADLEY, 2002).

- se $f''(c) > 0, f(c)$ é o mínimo absoluto de $f(x)$ no intervalo I;
- se $f''(c) < 0, f(c)$ é o máximo absoluto de $f(x)$ no intervalo I.

No próximo exemplo vamos utilizar o teste da derivada segunda para determinar os extremos absolutos.

Exemplo 2.3: Um fabricante estima que quando q unidades de uma certa mercadoria são produzidas por mês, o custo total é $C(q) = 0{,}4q^2 + 3q + 40$ reais e que as q unidades podem ser vendidas por preço $p(q) = 0{,}2(45 - 0{,}5q)$ reais a unidade. Determine o nível de produção para o qual o lucro é máximo. Qual é o lucro máximo?

Solução: A receita é

$$R(q) = qp(q) = q[0{,}2(45 - 0{,}5q)] = 9q - 0{,}1q^2$$

Portanto, o lucro é

$$\begin{aligned} L(q) = R(q) - C(q) &= (9q - 0{,}1q^2) - (0{,}4q^2 + 3q + 40) \\ &= -0{,}5q^2 + 6q - 40 \end{aligned}$$

a derivada

$$L'(q) = -q + 6$$

e $L'(q) = 0$, quando $q = 6$. Assim como $L''(q) = -1 < 0$, pelo teste da derivada segunda mostra que o lucro é máximo quando 6 unidades são produzidas. O lucro máximo é $L(6) = -0{,}5(6)^2 + 6(6) - 40 = -22$ reais, seria prejuízo para a empresa mesmo quando o lucro está maximizado.

3. Passos para resolver Problemas de Otimização

De acordo com Hoffmann e Bradley (2002) e Anton, Bivens e Davis (2009), existem alguns procedimentos essenciais para resolver problemas práticos de otimização que são os seguintes passos:

1° Passo: Escolher a grandeza que deve ser otimizada. Em seguida, listar todas as variáveis de interesse, é conveniente usar letras que tenha alguma relação com a grandeza, como L para lucro e V para volume.

2° Passo: Desenhe uma figura apropriada e indique quais as quantidades relevantes ao problema.

3° Passo: Usar as condições citadas no problema para eliminar variáveis, expresse a quantidade a ser maximizada ou minimizada como uma função de uma variável.

4° Passo: Interpretar os resultados em termos das grandezas físicas, geométricas ou econômicas apropriadas.

5º Passo: Se aplicável, use as técnicas das sessões anteriores para obter o máximo ou o mínimo.

Os passos mencionados anteriormente são de extrema importância para resolver os problemas de otimização, quando estiver frente a frente com um problema, reflita: o que eu sei do problema? O que eu não sei? Qual a grandeza a otimizar? Quais variáveis usar? Devo fazer um desenho? Estes tipos de perguntas, são cruciais para compreender e resolução dos problemas de otimização.

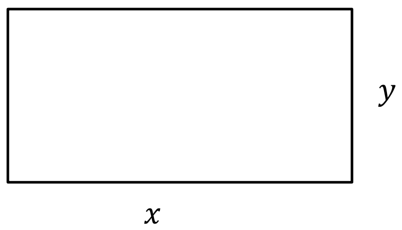
4. Problemas de Otimização

Nesta seção apresentamos alguns problemas de otimização que são aplicados no cotidiano, alguns deles resolvidos e outros apenas como dica.

Aplicação na Geometria (THOMAS, 2009).

Problema 4.1: Minimizando o perímetro – Qual é o menor perímetro possível para um retângulo cuja área é 16 pol^2e quais são suas dimensões?

Solução:



O perímetro é

$$P = 2x + 2y \qquad (1)$$

e a área é de 16 pol^2, assim

$$A = xy$$

$$16 = xy$$

isolando uma variável, segue

$$y = \frac{16}{x}$$

Substituindo na equação (1), temos

$$P = 2x + 2\left(\frac{16}{x}\right) = 2x + \frac{32}{x}$$

Portanto a função que queremos minimizar é

$$P(x) = 2x + \frac{32}{x}, \qquad x > 0$$

Para encontrar os pontos críticos, derivamos:

$$P'(x) = 2 - \frac{32}{x^2}$$

então $P'(x) = 0$, quando $\frac{32}{x^2} = 2$, isto é, $x = -4$ ou $x = 4$. Como $x > 0$, logo o ponto crítico é $x = 4$. Uma vez que o domínio de P é$(0, \infty)$, podemos observar que $P'(x) < 0$ para todo $x < 4$ e $P'(x) > 0$ para todo $x > 4$, então$P(4) = 16$ é o valor mínimo absoluto de P.

Logo, achando a outra dimensão, temos

$$y = \frac{16}{x} = \frac{16}{4} = 4$$

Portanto, o perímetro mínimo do retângulo é

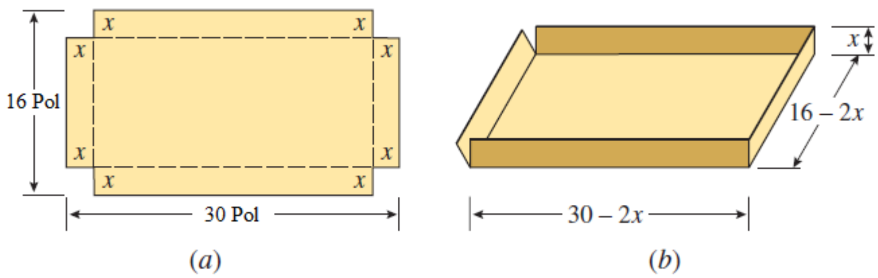
$$P = 2x + 2y = 2(4) + 2(4) = 16\,pol$$

e as dimensões que minimizam o perímetro é de $x = 4\ \ pol$ e $y = 4\,pol.$

Aplicação na Geometria (ANTON, BIVENS E DAVIS, 2009).

Problema 4.2: (Nossa Tradução) Uma caixa aberta tem que ser feita em 16 por 30 polegadas de um papelão cortando-se quadrados de lado igual nos quatro cantos e dobrando os lados (Figura 3). Que tamanho deveriam ser os quadrados para obter a caixa com o maior volume

Figura 3: Caixa Aberta



Fonte: Anton, Bivens e Davis (2009, p. 276)

Solução:

Para ênfase, nós mostramos uma lista de passos com os 5 passos para a resolução de problemas com esse tipo de enunciado.

Passo 1: A figura 3 ilustra o pedaço de papelão com os quadrados removidos em cada canto. Então

x = comprimento (em polegadas) dos lados dos quadrados que serão cortados.

V = volume (em polegadas cúbicas) da caixa resultante.

Passo 2: Já que estamos removendo um lado x de cada canto, o resultado será $16 - 2x$ vezes $30 - 2x$ vezes x (figura 3). Já que o volume de uma caixa é o produto de suas dimensões, nós temos

$$V = (16 - 2x)(30 - 2x)x = 480x - 92x^2 + 4x^3 \quad (I)$$

Passo 3: Note que a expressão do volume já está em termos com a variável x.

Passo 4: A variável x em (I) é sujeita a certas restrições. Já que x representa um comprimento, não pode ser negativo, e pela largura do papelão ser de 16 polegadas, nós não podemos cortar quadrados cujos lados sejam maiores que 8 polegadas. Portanto, a variável x em(I) tem que satisfazer

$$0 \leq x \leq 8$$

E portanto, teremos reduzido nosso problema a encontrar o valor (ou valores) de x no intervalo entre [0,8] dos quais (I) é o nosso máximo.

Passo 5: De (I) nós obtemos

$$\frac{dV}{dx} = 480 - 184x + 12x^2 = 4(120 - 46x + 3x^2 = 4(x - 12)(3x - 10)$$

Se ajustarmos $\frac{dV}{dx} = 0$, temos

$$x = \frac{10}{3} \quad \text{e} \quad x = 12$$

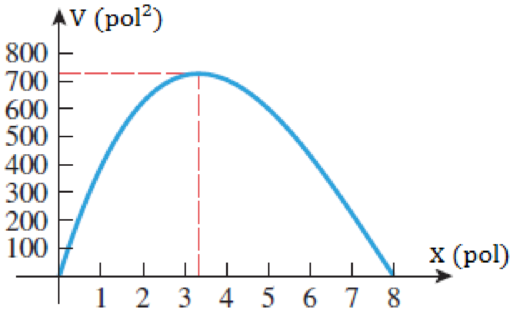
Já que $x = 12$ está fora do intervalo [0,8], o valor máximo de V ocorre ou entre o ponto crítico $x = \frac{10}{3}$ ou nos extremos $x = 0$, $x = 8$. Substituindo esses valores em (I) mostramos na Tabela 1, que nos diz que o maior volume possível $V = 19.600/27\ pol^3 \approx 726\ pol^3$ ocorre quando nós cortamos quadrados cujos lados tem $\frac{10}{3}$ polegadas. Isso está consistente no gráfico de (I), mostrado na Figura 4.

Tabela 1: Substituição de Valores

x	0	$\frac{10}{3}$	8
V	0	$\frac{19,600}{27} \approx 726$	0

Fonte: Anton, Bivens e Davis (2009, p. 276)

Figura 4: Gráfico do Volume



Fonte: Anton, Bivens e Davis (2009, p. 276)

Aplicação na Economia (HOFFMANN e BRADLEY, 2002).

Problema 4.3: Maximizando o Lucro – Uma fabricante produz uma fita de vídeo virgem a um custo de R$ 2,00 a unidade. As fitas vêm sendo vendidas a R$ 5,00 a unidade; por esse preço, são vendidas 4.000 por mês. O fabricante pretende aumentar o preço da fita e calcula que para cada R$ 1,00 de aumento no preço, menos 400 fitas serão vendidas por mês. Qual deve ser o preço de venda das fitas para o lucro do fabricante seja máximo?

Solução: Seja x o novo preço de venda das fitas e $L(x)$ o lucro correspondente. O objetivo é maximizar o lucro, começamos por expressar o lucro em palavras:

$$Lucro \ = \ (número\ de\ fitas\ vendidas)(lucro\ por\ fita)$$

Como 4000 fitas são vendidas por mês quando o preço é R$ 5,00 e menos 400 fitas serão vendidas para cada R$ 1,00 de aumento no preço, temos:

$$Número\ de\ fitas\ vendidas \ = \ 4.000 - 400(número\ de\ aumentos\ de\ R\$\ 1{,}00)$$

O número de aumentos de R$ 1,00 no preço é a diferença $x - 5$ entre o preço novo e o antigo. Disto,

$$\begin{aligned} Números\ de\ fitas\ vendidas &= 4.000 - 400(x-5) \\ &= 400[10 - (x-5)] \\ &= 400(15 - x) \end{aligned}$$

O lucro por fita vendida é simplesmente a diferença entre de venda x e o custo, R$ 2,00. Assim,

$$Lucro\ por\ fita = x - 2$$

Combinando as relações anteriores, temos:

$$\begin{aligned} L(x) &= 400(15 - x)(x - 2) \\ &= (6.000 - 400x)(x - 2) \end{aligned}$$

$$= 6.000x - 12.000 - 400x^2 + 800x$$

$$= 6.800x - 400x^2 - 12.000$$

O Objetivo é determinar o máximo absoluto da função de lucro $L(x)$. Para estabelecer qual é o intervalo relevante para este problema, basta observar que, como foi dito no enunciado que o novo preço será mais alto que o antigo, devemos ter $x \geq 5$. Por outro lado, o número de fitas vendidas é $400(15 - x)$,um número que se torna negativo para

$x > 15$. Desta forma, podemos restringir o problema de otimização ao intervalo fechado $5 \leq x \leq 15$. Dessa forma, restringimos o intervalo fechado $5 \leq x \leq 15$.

Para determinar o ponto crítico, derivamos:

$$L'(x) = 6.800 - 800x$$

Então $L'(x) = 0$, quando $800x = 6.800$, isto é, $x = 8{,}5$. Comparando os valores da função de lucro, temos

$$L(5) = 12.000 \qquad L(8{,}5) = 16.900 \qquad \text{e} \qquad L(15) = 0$$

no ponto crítico e nos extremos do intervalo, chegamos à conclusão que o maior lucro possível é R$ 16.900,00, que será obtido se as fitas forem vendidas por R$ 8,50 a unidade.

Problema 4.4: (Nossa tradução) (ANTON, BIVENS e DAVIS, 2009).

Um produtor de fertilizante descobre que pode vender seu produto com um preço $p = 300 - 0.1x$ dólares por unidade quando produz x unidades de fertilizante. O custo de produção total (em dólares) para x unidades é $C(x) = 15.000 + 125x + 0.025x^2$. Se a capacidade de produção da firma é de no máximo 1000 unidades de fertilizado em um tempo específico, quantas unidades devem produzir e vender naquele tempo para maximizar o lucro?

Problema 4.5: (Nossa tradução) (ANTON, BIVENS e DAVIS, 2009).

Um fabricante de químicos vende ácido sulfúrico em massa num preço de 100 dólares por unidade. Se o custo de produção total de um dia em dólares por x unidades for

$$C(x) = 100.000 + 50x + 0.0025x^2$$

e se a capacidade de produção é de no máximo 7000 unidades, quantas unidades de ácido sulfúrico deve ser manufaturadas e vendidas para maximizar o lucro?

5. Considerações Finais

Tais aplicações são de extrema importância em determinadas áreas na economia, como visto no exemplo 2.3, mesmo que o lucro seja maximizado o fabricante teria prejuízo, o que nos levaria a procurar alguma solução para que o fabricante pudesse fazer alguns ajustes de tal forma a não sair perdendo. Casos como esse são comuns, e é nessa hora que pretendemos mostrar ferramentas que podem proporcionar alguma informação e até a solução do problema.

6. Referências

ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Calculus:** Early Transcendentals. 9th. Ed. Hoboken: John Wiley and Sons, Inc. 2009.

HOFFMANN, Laurence D; BRADLEY, Gerald L. **Cálculo:** Um Curso Moderno e Suas Aplicações.7ª. ed. Rio de Janeiro: LTC-Livros Técnicos e Científicos, 2002.

STEWART, James. **Cálculo**, vol. I. 7ª. ed. São Paulo:Cengage Learning, 2014.

THOMAS, George B. **Cálculo**,vol. 1.11º. ed.São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2009.