O Mito das Ambigüidades nas Representações Decimais

Gentil Lopes da Silva*

15 de agosto de 2008

Resumo

Este trabalho põe fim às intermináveis pendengas sobre as representações decimais de reais do intervalo $[\,0,\,1\,]$. Mostramos que as supostas ambigüidades de algumas destas representações, tipo: $0,5 = 1/2 = 0,4999\ldots$ são um mito. Aqui esclarecemos, em definitivo, igualdades tais como $0,999\ldots = 1$.

"E, conquanto as ideias e o pensamento matemáticos estejam em constante evolução [...] a maioria dos problemas básicos fundamentais nunca desaparece." (G. Chaitin)

Introdução: Neste trabalho abordaremos a questão das representações decimais e perseguiremos, dentre outros, o seguinte objetivo: mostrar que as supostas ambigüidades de tais representações são um mito.

O conceito do éter revelou-se um fantasma criado pela imaginação dos físicos do século XIX. Neste trabalho mostramos, igualmente, que representações tipo $0,5 = 1/2 = 0,4999\ldots$ não têm "existência real"; são fantasmas criados pela imaginação dos matemáticos.

Assim como foi decisivo, para o progresso da física, que se exorcizasse o fantasma do éter, cremos que igualmente será de relevância para a matemática exorcizarmos os fantasmas das ambigüidades.

Mostraremos que o esclarecimento desta questão − aqui a deixamos assaz cristalina − vai simplificar, amiúde, muitas construções matemáticas; a exemplo da construção da curva de Peano. Na referência [4] mostramos uma (nova) construção desta curva mais simples que as constantes na literatura.

Representações decimais

Existem duas alternativas para se definir as representações decimais: via convergência de séries e via bijeção entre conjuntos.

Para exemplificar a primeira alternativa (ver [2]/pág. 231):

"Antes de definir φ, lembremos que os números reais admitem não somente uma **expressão** decimal como também, fixado qualquer número $b > 1$, todo número real possui uma *expressão* na base b. Em particular, se $0 \leq x \leq 1$, a expressão $x = 0, x_1 x_2 \ldots x_n \ldots$ de x na base b significa que

$$x = \frac{x_1}{b} + \frac{x_2}{b^2} + \cdots + \frac{x_n}{b^n} + \cdots \text{"}$$

*www.dmat.ufrr.br/∼ gentil ∴ gentil.silva@gmail.com

Ainda mais à frente, nesta mesma página, o autor escreve:
"Para ver que φ é injetiva, basta lembrar que, assim como a **representação** decimal de um número $x \in [0, 1]$ é única, exceto por ambigüidades do tipo $0,47999\ldots = 0,48000\ldots$".

Vejamos mais um exemplo, segundo este autor $0,011000\ldots$ e $0,010111\ldots$ são duas representações, na base 2, de $\frac{3}{8}$, porquanto

$$\frac{0}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{0}{2^4}+\frac{0}{2^5}+\frac{0}{2^6}+\cdots=\frac{3}{8}=\frac{0}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{0}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\cdots \quad (1)$$

Definição via bijeção

Construiremos agora uma representação alternativa para os reais. Vamos nos restringir aos reais do intervalo $[0, 1]$ uma vez que qualquer número real situa-se entre dois inteiros consecutivos, isto é, dado $x \in \mathbb{R}$ sucede que $x \in [m, m+1]$ para algum inteiro m. Em suma, todo real pode ser transladado para o intervalo $[0, 1]$. Também vamos nos restringir ao caso da base 2 − base binária − uma vez que o que faremos aqui com respeito a esta base pode ser repetido para uma outra base qualquer.

Para a *construção* de uma representação binária − para os números reais − iremos necessitar do seguinte produto cartesiano:

$$\{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \cdots$$

Este é o conjunto das seqüências infinitas de $0'$s e $1'$s. Por exemplo, dois elementos deste conjunto são: $1\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\ldots$ e $0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\ldots$.

Gostariamos de definir uma bijeção entre os conjuntos $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ e $[0, 1]$, assim:

$$\begin{aligned} f\colon \{0, 1\}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow [0, 1] \\ (x_n) &\longmapsto \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} \end{aligned}$$

Esta aplicação está bem definida uma vez que a série em questão é majorada pela série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ cuja soma é 1 . Infelizmente f não é injetiva porquanto,

$$f\big(x_1 \ldots x_j 000\ldots\big) = f\big(x_1 \ldots x_{j-1}(x_j - 1)111\ldots\big) \quad (2)$$

Como é fácil verificar. Reciprocamente, supondo $f(x) = f(y)$ e $x \neq y$ vamos mostrar que $x = x_1x_2x_3\ldots$ e $y = y_1y_2y_3\ldots$ só podem ser da forma das representações que aparecem em (2).

Prova: De fato, seja j o primeiro índice onde x difere de y; suponhamos, ademais, que $x_j = 1$. Sendo assim podemos escrever

$$\begin{aligned} x &= x_1\, x_2 \ldots x_{j-1} 1\, x_{j+1}\, x_{j+2} \ldots \\ y &= x_1\, x_2 \ldots x_{j-1} 0\, y_{j+1}\, y_{j+2} \ldots \end{aligned}$$

Devemos mostrar que

$$f(x) = f(y) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x_{j+1} = x_{j+2} = \cdots = 0; \\ y_{j+1} = y_{j+2} = \cdots = 1. \end{cases}$$

A igualdade $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n}{2^n}$ pode ser escrita assim

$$\frac{x_1}{2^1}+\frac{x_2}{2^2}+\cdots+\frac{x_{j-1}}{2^{j-1}}+\frac{1}{2^j}+\frac{x_{j+1}}{2^{j+1}}+\cdots=\frac{x_1}{2^1}+\frac{x_2}{2^2}+\cdots+\frac{x_{j-1}}{2^{j-1}}+\frac{0}{2^j}+\frac{y_{j+1}}{2^{j+1}}+\cdots$$

Logo,

$$\frac{1}{2^j}+\frac{x_{j+1}}{2^{j+1}}+\cdots=\frac{y_{j+1}}{2^{j+1}}+\cdots$$

Ou ainda,

$$\frac{1}{2^j}+\sum_{n=j+1}^{\infty}\frac{x_n}{2^n}=\sum_{n=j+1}^{\infty}\frac{y_n}{2^n}$$

como $\displaystyle\sum_{n=j+1}^{\infty}\frac{y_n}{2^n}\leq\frac{1}{2^j}$, isto implica em que esta igualdade só poderá ser satisfeita em uma única situação; qual seja, aquela em que $x_n=0$, para $n\geq j+1$ e $y_n=1$, para $n\geq j+1$. ■

Tendo em vista os argumentos anteriores, resulta injetiva a seguinte aplicação

$$\begin{aligned}\lambda\colon \mathbb{B} &\longrightarrow [\,0,\,1\,]\\ (x_n) &\longmapsto \textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{2^n}\end{aligned}$$

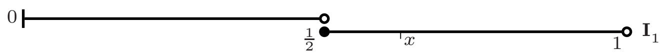
onde $\mathbb{B}$ é o subconjunto de $\{\,0,\,1\,\}^{\mathbb{N}}$ cujos elementos não têm todos os termos iguais a 1, a partir de alguma posição*.

Por exemplo: $0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\ldots\in\mathbb{B}$ e $1\,0\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\ldots\notin\mathbb{B}$.

Mostraremos agora que λ é sobre $[\,0,\,1\,[$. Seja dado, arbitrariamente, um ponto $x\in[\,0,\,1\,[$ e mostremos que este é imagem, por λ, de alguma seqüência binária de $\mathbb{B}$. De fato, dividamos o intervalo $[\,0,\,1\,[$ ao meio, assim

$$[\,0,\,1\,[=[\,0,\,\frac{1}{2}\,[\,\cup\,[\,\frac{1}{2},\,1\,[\,=\bigcup_{j=0}^{1}\Big[\frac{j}{2},\,\frac{j+1}{2}\Big[$$

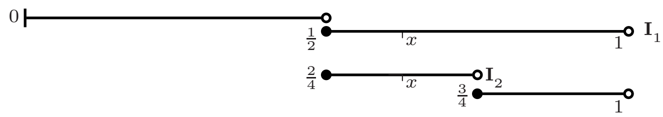
sendo assim, x pertence a um, e só um, desses subintervalos, digamos $x\in\mathbf{I}_1=\big[\frac{x_1}{2},\,\frac{x_1+1}{2}\big[$. Após o "corte" se x resulta no subintervalo da esquerda $x_1=0$, se, no da direita $x_1=1$. Por exemplo:



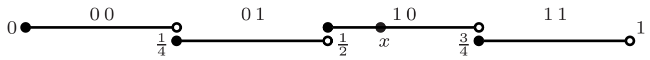
Neste caso temos $x_1=1$. A seguir dividamos este subintervalo em dois outros, assim $\Big[\frac{x_1}{2},\,\frac{x_1+1}{2}\Big[\;=\displaystyle\bigcup_{j=0}^{1}\Big[\frac{x_1}{2}+\frac{j}{2^2},\,\frac{x_1}{2}+\frac{j+1}{2^2}\Big[$. Selecionemos x_2 tal que $x\in\mathbf{I}_2=\Big[\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2^2},\,\frac{x_1}{2}+\frac{x_2+1}{2^2}\Big[$.

(parentêsis:) Observe que o extremo esquerdo deste intervalo, no caso, $\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2^2}$ nada mais é que a segunda soma parcial da série $\sum\frac{x_n}{2^n}$ (da definição de λ). Por exemplo, o extremo esquerdo de $\mathbf{I}_3$ seria $\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2^2}+\frac{x_3}{2^3}$, a terceira soma parcial da referida série.

*Com a única exceção feita para a seqüência $(1\,1\,1\,1\ldots)$ a qual incluimos neste conjunto.



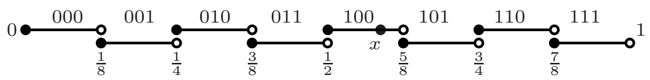
No caso da figura $x_2 = 0$. Dividindo o intervalo $[\,0,\,1\,[$ em quatro partes os dois primeiros digitos $(x_1\,x_2\ldots)$ da seqüência que pretendemos associar a x, são as "coordenadas" do ponto x de acordo com o diagrama a seguir:



x_1	x_2
0	0
0	1
1	0
1	1

Resumindo: x_1 nos diz em qual metade do intervalo encontra-se x; $x_1\,x_2$ nos diz em qual quarta parte do intervalo encontra-se x.

Dividindo o intervalo $[\,0,\,1\,[$ em oito partes os três primeiros digitos $(x_1\,x_2\,x_3\ldots)$ da seqüência que pretendemos associar a x, são as "coordenadas" do ponto x de acordo com o diagrama a seguir:



x_1	x_2	x_3
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

Este processo de divisões sucessivas é continuado indefinidamente. Consideremos $\bar{\mathbf{I}}_n$ o intervalo fechado com os mesmos extremos de $\mathbf{I}_n$. Observe que $(\,\bar{\mathbf{I}}_n\,)$ é uma seqüência de intervarlos que cumpre as hipóteses do teorema dos intervalos encaixantes (ver teor. 1, pág. 14), por conseguinte $\cap_{n=1}^{\infty}\bar{\mathbf{I}}_n$ consiste em um único ponto. Como $x \in \cap_{n=1}^{\infty}\bar{\mathbf{I}}_n$, resulta que a seqüência formada pelas extremidades esquerdas dos $\mathbf{I}_n$ converge para x, isto é, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{2^n} = x$. Sendo assim tomamos a seqüência binária $(x_1\,x_2\,x_3\ldots)$ para corresponder a x.

Resulta assim que λ é uma bijeção e, desta forma, podemos identificar os elementos de ambos os conjuntos: $[\,0,\,1\,]$ e $\mathbb{B}$.

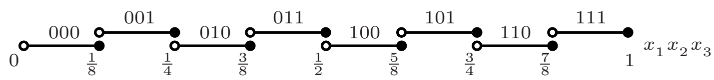
$$\begin{aligned} \lambda\colon \mathbb{B} &\longrightarrow [\,0,\,1\,] \\ (x_n) &\longmapsto \textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{2^n} \end{aligned}$$

- Definição de representação binária

λ sendo uma bijeção possui inversa $\lambda^{-1}\colon [\,0,\,1\,] \to \mathbb{B}$. A imagem de um $x \in [\,0,\,1\,]$ por λ^{-1} é o que chamamos de representação binária de x. Isto é, diremos, por definição, que uma representação binária é um elemento de $\mathbb{B}$. Sendo assim, por exemplo, $(101010\ldots)$ é uma representação binária, enquanto $(0101111\ldots)$ não. Dizemos que os números do intervalo $[\,0,\,1\,]$ são codificados pelos elementos de $\mathbb{B}$.

Mais uma alternativa para se definir representação

O que aconteceria se na construção anterior optarmos por abrir todos os subintervalos à esquerda?, por exemplo assim:



Observe que com esta escolha estamos optando pelas representações:

$$x=\tfrac{1}{8} \quad\Rightarrow\quad x\in\left]\,0,\,\tfrac{1}{8}\,\right] \quad\Rightarrow\quad \tfrac{1}{8}=(0\,0\,0\,1\,1\,1\ldots)_2$$
$$x=\tfrac{1}{4} \quad\Rightarrow\quad x\in\left]\,\tfrac{1}{8},\,\tfrac{1}{4}\,\right] \quad\Rightarrow\quad \tfrac{1}{4}=(0\,0\,1\,1\,1\,1\ldots)_2$$
$$x=\tfrac{3}{4} \quad\Rightarrow\quad x\in\left]\,\tfrac{5}{8},\,\tfrac{3}{4}\,\right] \quad\Rightarrow\quad \tfrac{3}{4}=(1\,0\,1\,1\,1\,1\ldots)_2$$
$$x=\tfrac{7}{8} \quad\Rightarrow\quad x\in\left]\,\tfrac{3}{4},\,\tfrac{7}{8}\,\right] \quad\Rightarrow\quad \tfrac{7}{8}=(1\,1\,0\,1\,1\,1\ldots)_2$$

Procedendo como na construção anterior podemos mostrar que a aplicação,

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}\colon \tilde{\mathbb{B}} &\longrightarrow \left]\,0,\,1\,\right]\\ (x_n) &\longmapsto \textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{2^n}\end{aligned}$$

resulta injetiva. Onde, $\tilde{\mathbb{B}}$ é o subconjunto de $\{\,0,\,1\,\}^{\mathbb{N}}$ cujos elementos não têm todos os termos iguais a 0, a partir de alguma posição. Se incluirmos a seqüência $(0\,0\,0\,0\,\ldots)$ em $\tilde{\mathbb{B}}$ podemos fechar o intervalo unitário à esquerda. Pelo teorema dos intervalos encaixantes, resulta que $\tilde{\lambda}$ é também sobrejetiva, portanto,

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}\colon \tilde{\mathbb{B}} &\longrightarrow [\,0,\,1\,]\\ (x_n) &\longmapsto \textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{2^n}\end{aligned}$$

é uma bijeção. Deste modo, temos duas alternativas para definir representações binárias. Por exemplo,

$$\frac{3}{8}=(0\,1\,1\,0\,0\,0\ldots)$$

ou,

$$\frac{3}{8}=(0\,1\,0\,1\,1\,1\ldots)$$

dependendo se optarmos pela bijeção λ ou $\tilde{\lambda}$, respectivamente.

Duplicidade × Ambigüidade

Há que se fazer distinção entre duplicidade e ambigüidade nas representações binárias (ou decimais). Duplicidade significa, precisamente, que temos duas opções para definir representações; ambigüidade significa que não optamos, ficamos com as duas representações simultâneamente.

– Entendemos uma representação (binária no caso) como uma codificação dos elementos de um conjunto (no caso $[\,0,\,1\,]$) pelos elementos de um outro conjunto (no caso $\mathbb{B}$ ou $\tilde{\mathbb{B}}$), esta codificação se dá justamente via bijeção.

Importante! O leitor, com um pouco de reflexão, há de concluir que a existência da representação (bijeção) só será possível se a opção for feita (geometricamente significa que devemos optar por um dos diagramas: abertos à esquerda ou à direita) – caso contrário não haverá bijeção e, em decorrência, não poderá haver representação (codificação). Ora, uma vez feita a opção, as ambigüidades deixam de existir (tornam-se meros fantasmas, a assombrar criancinhas desavisadas).

Adendo: Vou insistir, de uma outra perspectiva, na diferença entre *ambigüidade* e *duplicidade*, desta vez me valendo de uma analogia com a informática. Vejo a questão da representação (decimal, binária, . . .) dos reais algo similar ao que acontece com a codificação dos caracteres do teclado de um computador, que são codificados pela tabela ASCII, por exemplo:

$$\begin{array}{rcl} A & \leftrightarrow & 0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,1 \\ B & \leftrightarrow & 0\,1\,0\,0\,0\,0\,1\,0 \\ < & \leftrightarrow & 0\,0\,1\,1\,1\,1\,0\,0 \\ ! & \leftrightarrow & 0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,1 \end{array}$$

O fato de existirem várias possibilidades para a codificação dos caracteres de um computador não inviabiliza* a informática; isto significa, tão somente, que devemos optar por uma dentre estas várias possibilidades.

De outro modo: Ambigüidade seria, por exemplo, se a letra A tivesse duas codificações. No caso da informática existe não *duplicidade* mas *multiplicidade*, uma vez que podemos codificar um caracter de inúmeros modos. Mas o que acontece é que na informática não se ouve falar de ambigüidade na representação de um caracter, simplesmente por que todos os fabricantes optaram por uma única codificação; caso contrário a informática se tornaria inviável: alguém digitaria a letra A em um email e o destinatário receberia a letra B, por exemplo, uma verdadeira torre de babel.

Aproveitando este exemplo, observe que a eliminação da ambigüidade (multiplicidade) traz vantagens, simplificações; é precisamente isto que estou defendendo que deva ocorrer na matemática no que diz respeito às *representações* que nada mais são que codificações para os números reais.

Conclusão: Quando dizemos o "mito das ambigüidades" ou "fantasmas das ambigüidades" entendemos que as ambigüidades (fantasmas) de fato existem apenas se adotamos a definição de representações via *convergência de séries*, caso contrário não.

Com efeito, pela alternativa das bijeções surge uma duplicidade (não ambigüidade), uma vez que optemos por uma das bijeção, λ ou $\tilde{\lambda}$, a representação torna-se única.

Por oportuno, na referência [5]/pág. 60 o autor define a representação dos inteiros via bijeção. Na pág. 62 lemos:

"A justificativa da validade da **representação** acima se apoia no Teorema 7 que nos garante ser uma bijeção a função

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Z}_b^+ & \longrightarrow & \mathbb{Z}^+ \\ x_n \ldots x_0 & \longrightarrow & c_0 + \cdots + c_n \cdot b^n \end{array}$$

onde $\mathbb{Z}_b^+$ é o conjunto dos elementos da forma $x_n \ldots x_0$, com $x_n \neq 0$ se $n > 1$ e onde para cada i, tem-se que c_i é o inteiro correspondente ao símbolo x_i."

De igual modo deve suceder na representação do reais; digo, se escolhermos definir via bijeção então somos forçados a optar entre duas bijeções possíveis; caso não optemos, insistimos, não haverá bijeção e, por conseguinte, não haverá representação; a não ser via séries como faz o autor já referido ([2]) mas aí surge o inconveniente das ambigüidades (fantasmas)... é uma questão de pura lógica (inteligência!).

*E nem complica, como acontece na matemática com algumas construções que dependem de representações (codificações), a exemplo da Curva de Peano. Neste particular, os engenheiros de hardware foram mais inteligentes que os matemáticos. Isto é, *fixaram* uma das − possíveis − codificações e pronto!

Nossa perspectiva e a literatura

No que se segue vamos considerar, a exemplo das representações binárias, as seguintes representações (bijeções) decimais:

$$\begin{aligned} \lambda\colon \mathbb{D} &\longrightarrow [\,0,\,1\,] \\ (x_n) &\longmapsto \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{10^n} \end{aligned}$$

onde $\mathbb{D}$ é o subconjunto de $\{\,0,\,1,\,2,\,\ldots,\,9\,\}^{\mathbb{N}}$ cujos elementos não têm todos os termos iguais a 9, a partir de alguma posição*. Observe que, neste caso, $.4999\ldots$ não é a representação decimal de $\frac{1}{2}$.

Também,

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}\colon \tilde{\mathbb{D}} &\longrightarrow [\,0,\,1\,] \\ (x_n) &\longmapsto \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{10^n} \end{aligned}$$

onde $\tilde{\mathbb{D}}$ é o subconjunto de $\{\,0,\,1,\,2,\,\ldots,\,9\,\}^{\mathbb{N}}$ cujos elementos não têm todos os termos iguais a 0, a partir de alguma posição†. Observe que, neste caso, $.4999\ldots$ é a representação decimal de $\frac{1}{2}$.

• No livro "Meu Professor de Matemática" (4ª Edição) o Prof. Elon Lages Lima, trata das representações decimais. Vejamos, à luz de nossas considerações, a análise de alguns pontos considerados pelo autor: No ítem (pág. 158),

6. Que significa a igualdade $\frac{1}{9} = 0,111\ldots$?

Ao discorrer sobre tais questões a plataforma de argumentações do autor estriba-se na convergência de séries, como o leitor pode averiguar na referida obra.

Defendemos que argumentações baseadas nas representações definidas via bijeção dispensam *tergiversações* e são mais convincentes. De fato, dentro do contexto em que nos situamos (isto é, definir representação via bijeção) para justificar as igualdades:

$$\begin{aligned} \frac{1}{9} &= 0,\,111\ldots \\ 1 &= 0,\,999\ldots \\ 32,\,8 &= 32,\,799\ldots \end{aligned}$$

nos sentimos mais confortáveis, respondemos: A primeira e a segunda se devem às seguintes identificações:

$$\begin{array}{lllll} \frac{1}{9} \leftrightarrow 111\ldots & \text{onde} & \frac{1}{9} \in [\,0,\,1\,] & \text{e} & 111\ldots \in \mathbb{D}; \\ 1 \leftrightarrow 999\ldots & \text{onde} & 1 \in [\,0,\,1\,] & \text{e} & 999\ldots \in \mathbb{D}, \end{array}$$

quanto a terceira das igualdades acima, ela é falsa. De fato, façamos uma translação destes números para o intervalo $[\,0,\,1\,]$, isto é: $0,\,8 = 0,\,7999\ldots$. Observe que as seqüências correspondentes resultam em conjuntos distintos: $(8\,0\,0\,0\,0\ldots) \in \mathbb{D}$ e $(7\,9\,9\,9\,9\ldots) \in \tilde{\mathbb{D}}$, ou ainda, a bijeções distintas: λ e $\tilde{\lambda}$. Não podemos misturar as definições.

*Com a única exceção feita para a seqüência $(9\,9\,9\,9\ldots)$ a qual foi incluída neste conjunto.

†Com a única exceção feita para a seqüência $(0\,0\,0\,0\ldots)$ a qual foi incluída neste conjunto.

Na pág. 160, lemos:

Assim, as frações decimais

(∗) $0,27 \quad 0,2727 \quad 0,272727 \quad$ etc.

constituem valores aproximados da fração ordinária 3/11. Quanto maior for o número de algarismos decimais tomados, menor será o erro cometido (isto é, melhor será a aproximação). Por isso quando escrevemos

$$\frac{3}{11} = 0,2727\ldots$$

não estamos afirmando que $\frac{3}{11} = 0,2727$. As reticências no fim do símbolo $0,2727\ldots$ significam que ele não representa uma única fração decimal mas a seqüência infinita de frações decimais (∗) acima, as quais são valores aproximados de 3/11.

− Novamente aqui nossa abordagem nos permite justificar a referida igualdade de modo mais cômodo e consistente, assim: $\frac{3}{11} = 0,2727\ldots$; devido a que,

$$\tfrac{3}{11} \xrightarrow{\lambda^{-1}} 2727\ldots \quad \text{onde } \tfrac{3}{11} \in [\,0,\,1\,] \text{ e } 2727\ldots \in \mathbb{D}$$

Mais à frente (pág. 162):

7. Dúvidas sobre dízimas

. . . Duas das mais interessantes entre essas perguntas foram feitas por Sun Hsien Ming, de São Paulo, SP.

Elas são:

1ª) Existe alguma fração ordinária tal que, dividindo-se o numerador pelo denominador, obtenha-se a dízima periódica $0,999\ldots$?

De momento vai nos interessar a segunda pergunta:

2ª) O fato de a mesma fração ordinária poder ter duas representações decimais distintas (como $2/5 = 0,4000\ldots = 0,3999\ldots$) não apresenta inconveniente nem origina paradoxos?

Uma boa pergunta. No nosso entendimento achamos que o Prof. Elon usa de `tergiversação` ao tentar respondê-la, como o leitor pode verificar lendo sua resposta no citado livro. No final da argumentação lemos:

"Nenhuma dessas escolhas é muito natural."

Não sei o que o prof. entende por "muito natural", porquanto do ponto de vista da lógica as duas são igualmente naturais, basta que optemos por uma das bijeções: λ ou $\tilde{\lambda}$.

Em seguida: "Por isso me parece mais razoável que nos resignemos com a falta de biunivocidade. Há coisas piores no mundo."

Este não me parece um conselho muito sábio, embora em um ponto o Prof. tenha razão, de fato há coisas piores no mundo: as bombas sobre hiroshima e nagasaki, ou a proliferação, em nosso país, de surrupiadores dos cofres público, por exemplo.

− Eu diria que nós não devemos nos "resignar" com a falta de biunivocidade mas, sim, nos "rejubilar" pelo excesso; pelo contrário, existe excesso: existem duas aplicações biúnivocas (λ e $\tilde{\lambda}$).

De nossa perspectiva respondemos a Sun Hsien Ming: a dupla igualdade $2/5 = 0,\,4000\ldots = 0,\,3999\ldots$ é válida apenas do ponto de vista de convergência de séries, do ponto de vista das representações decimais ela é falsa[‡], não tem sustentação lógica. O correto é,

$$2/5 = 0,\,4000\ldots, \quad \text{se escolhermos } \lambda,$$

ou,

$$2/5 = 0,\,3999\ldots, \quad \text{se escolhermos } \tilde{\lambda}.$$

Nota: Em nosso trabalho [7] esclarecemos, em definitivo, o sentido da igualdade,

$$0,999... = 1$$

Mostramos que também pode ser $0,999... = 0$.

* * *

Em [7] **provamos** que, ao contrário do que acredita o prof. Elon, $0,\,999\ldots$ não é um número real, mas sim um símbolo (código)[*].

Poderia-se contra-argumentar: "o que é o número 1, ou 10, ou 1, 5 ou π? são números reais? ou são símbolos que representam números reais?"

Respondemos: Prá começar, como já deixamos claro (em [7]), fazemos distinção entre *meros* elementos de um conjunto e números. Vejo uma grande diferença entre, por exemplo, os símbolos: 1 e $0,\,999\ldots$. De fato, quando seguimos as construções numéricas,

$$\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

encontramos o símbolo 1 nos naturais, já o símbolo $0,\,999\ldots$ não é encontrado em nenhuma destas construções. E isto faz uma grande diferença.

Ao me perguntarem o que é um número, respondo que um número é um objeto que deriva das construções anteriores[†]. Por exemplo, um número inteiro é uma *classe de equivalência*, o "um" inteiro − por exemplo −, é dado assim:

$$\bar{1} = \{\,(1,\,0);\,(2,\,1);\,(3,\,2);\,(4,\,3);\ldots\,\}$$

portanto, $\bar{1} \neq 1$; digo, o "um" inteiro não é o mesmo 1 dos naturais. Agora em função da existência de um *isomorfismo* entre $\mathbb{N}$ e um subconjunto de $\mathbb{Z}$ é que podemos *identificar* os números: $\bar{1} \equiv 1$ ou ainda $\bar{1} = 1$. Daí a razão (isomorfismo) de usarmos o mesmo símbolo para o "um" de todos aqueles conjuntos.

Continuando, o símbolo $0,\,999\ldots$ pertence a um outro conjunto, o das *representações decimais*, ou *expressões decimais* como diz o prof. Elon. Então, podemos colocar:

$$\Re = \{\,0,\,999\ldots; 0,\,4999\ldots;\,0,\,5000\ldots;\,\ldots\} \tag{3}$$

[‡] Ver Importante! na página 5.

[*] Observe o leitor que esta distinção não significa pedantismo. De fato, as sutilezas lógicas do assunto em pauta exigem esse nível de rigor.

[†] A rigor um número é um ente *abstrato* que, entretanto, pode "tomar corpo" (manifestar-se) de diveros modos.

Não consideramos os elementos deste conjunto números, para tanto teriamos que definir, para expressões decimais, duas operações, uma chamada adição e outra multiplicação, estas operações deveriam satisfazer determinadas propriedades. Pois bem, nos parece que ninguém, até hoje, definiu estas operações (satisfazendo algumas propriedades − de *corpo ordenado completo*).

Se tais operações existissem para considerar $0,\,999\ldots = 1$ deveriamos mostrar a existência de um *isomorfismo* entre as estruturas:

$$\big(\,\mathbb{R}^{+},\,+,\,\cdot\,\big) \xrightarrow{\varphi} \big(\,\Re,\,+,\,\cdot\,\big)$$

tal que $\varphi(1) = 0,\,999\ldots$.

Então, o *elemento* $0,\,999\ldots$ teria adquirido o status de número real.

Como $\Re$ dado em (3) é apenas um conjunto, e não uma estrutura numérica (por falta das referidas operações), é que, no máximo, podemos estabelecer uma bijeção entre este conjunto e um subconjunto dos reais; daí, de fato podemos ter $0,\,999\ldots = 1$; mas esta é uma "igualdade" (identidade) entre elementos de dois conjuntos e não entre números de dois sistemas numéricos (daí resulta uma *representação decimal*, ou codificação decimal − como prefiro chamar − para o elemento real 1).

Costumo dizer que um isomorfismo (entre estruturas numéricas) identifica números, tal como $\bar{1} = 1$, referido acima; enquanto que uma bijeção (apenas) identifica elementos de dois conjuntos (é a isto que chamo de uma *codificação*, ou representação). Então, quando construimos a aplicação $\lambda\colon \mathbb{B} \longrightarrow [\,0,\,1\,]$ e esta não sendo um isomorfismo, tão somente uma bijeção, não podemos identificar os elementos de ambos os conjuntos como *números*, apenas como elementos (uma codificação, ou representação binária).* Então, do exposto, jamais podemos ver, a identidade,

$$0,\,999\ldots = 1$$

como sendo entre números, apenas entre elementos. Como já mencionamos, quando o prof. Elon prova (argumenta, justifica) esta igualdade, em nossa opinião ele apenas prova que uma série converge para 1. A igualdade $0,\,999\ldots = 1$, que provém de uma convergência, não é suficiente − no nosso entendimento − para elevar a expressão $0,\,999\ldots$ à categoria de número, apenas de um código para o elemento 1.

Concordamos que uma representação (simbologia) para um número não precisa ser única; por oportuno, escrevemos um trabalho intitulado "Os Números azuis" (ver [6]), onde construimos uma outra representação para os conjuntos numéricos†; agora qualquer candidata a uma representação de um número deve estar sujeita a duas operações (adição e multiplicação) satisfazendo um conjunto de propriedades; é precisamente por esta razão que as representações, tais como $0,\,999\ldots$, não podem ser vistas como números; tão somente como codificações de *elementos* reais.

Nota: Quero deixar registrado aqui um agradecimento aos colegas Claiton Petris (Unioeste-PR) e Milton Braitt (Ufsc) pelas trocas de idéias que tivemos a respeito das representações decimais e que, sem dúvida, influenciaram a redação destas notas.

*Mesmo porque em $\mathbb{B}$ não temos números, apenas elementos.

†Defino, para minhas representações − que são seqüências binárias, no caso dos naturais $\mathbb{N}$ −, adição e multiplicação, ambas satisfazendo todas as propriedades dos naturais.

1 Uma nova construção para a curva de Peano

"A razão frui emoções que os próprios corações desconhecem." (¬Pascal)

"As ambigüidades fazem o papel das ervas-daninhas, tão logo as cortamos o solo torna-se viçoso, as flores desabrocham."**Gentil (2º Bilhete)**

Ter exorcizado o fantasma das ambigüidades vai nos permitir simplificar algumas construções matemáticas. Por exemplo, construimos (ver [4]) uma curva de Peano onde trabalhamos apenas com a base binária:

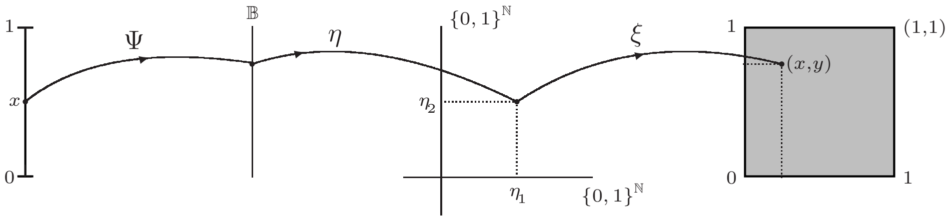


Figura 1: Curva de Peano Simplificada

Nesta construção mostramos que, sendo $(x,\, y)$ um ponto do quadrado, temos:

1ª) Se ambas as coordenadas, x e y, forem frações diádicas então, neste ponto são colocados três pontos do intervalo. De outro modo: a curva passa três vezes por pontos com ambas as coordenadas diádicas;

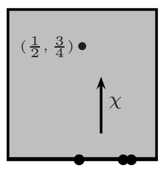
2ª) Se ambas as coordenadas, x e y, não forem diádicas então, neste ponto é colocado apenas um ponto do intervalo. De outro modo: a curva passa uma única vez em pontos com ambas as coordenadas não diádicas;

3ª) Se apenas uma das coordenadas, x ou y, é uma fração diádica então, neste ponto é colocado dois pontos do intervalo. De outro modo: a curva passa duas vezes em pontos com apenas uma coordenada diádica;

4ª) O conjunto dos pontos de auto-interseção da curva é infinito enumerável e denso no quadrado.

Exemplo:

$$\chi(\tfrac{23}{48})=\chi(\tfrac{37}{48})=\chi(\tfrac{39}{48})=(\tfrac{1}{2},\,\tfrac{3}{4})$$



Onde $\chi = \xi \circ \eta \circ \Psi$ é a curva de Peano. Nesta figura tomamos o intervalo unitário coincidindo com a aresta inferior do quadrado.

Observe que a curva de Peano (χ) pode ser vista de uma outra perspectiva (ainda mais paradoxal): Transfere todos os pontos da aresta inferior do quadrado (ou qualquer outra) para todo o quadrado, sem sobrar lugar vazio no quadrado (χ é sobrejetiva) e ainda guarda até três pontos da aresta numa mesma posição do quadrado!

1.1 O quadrado hiper-mágico

Para mais um exemplo de uma construção que obtivemos (ver [4]), a partir da definição legítima (de representação em base b), definimos:

Definição (Quadrado hiper-mágico.) Chama-se quadrado hiper-mágico num espaço métrico $\big(M,\, d\big)$, com M um quadrado (unitário), a uma aplicação contínua $\varphi\colon M \to \mathbf{I}$ injetiva e não sobrejetora. $\mathbf{I}$ é um intervalo unitário.

Pois bem, construimos o seguinte:

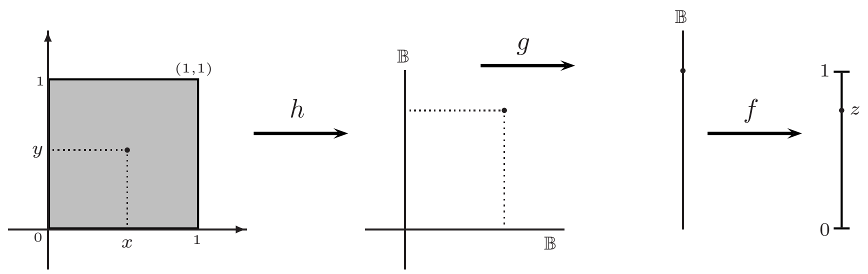


Figura 2: Quadrado hiper-mágico

Onde mostramos que, sendo $(x,\, y)$ um ponto do quadrado, temos:

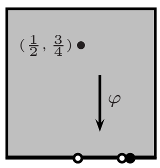
1ª) Se ambas as coordenadas, x e y, forem frações diádicas então este ponto vai para um ponto do intervalo e "gera" dois buracos (no intervalo);

2ª) Se ambas as coordenadas, x e y, não forem frações diádicas então este ponto vai para um ponto da aresta e não "gera" nenhum buraco;

3ª) Se apenas uma das coordenadas, x ou y, é uma fração diádica então este ponto vai para um ponto da aresta e "gera" um buraco;

4ª) o conjunto dos buracos é infinito enumerável, porquanto o conjunto dos pontos $(x,\, y) \in \mathbf{I}^2$ com coordenadas diádicas é enumerável.

Exemplo: Tendo em conta o exemplo dado anteriormente a fração $\big(\frac{1}{2},\, \frac{3}{4}\big)$ vai, por φ, para o ponto $\frac{39}{48}$ e gera os buracos $\frac{23}{48}$ e $\frac{37}{48}$, assim:

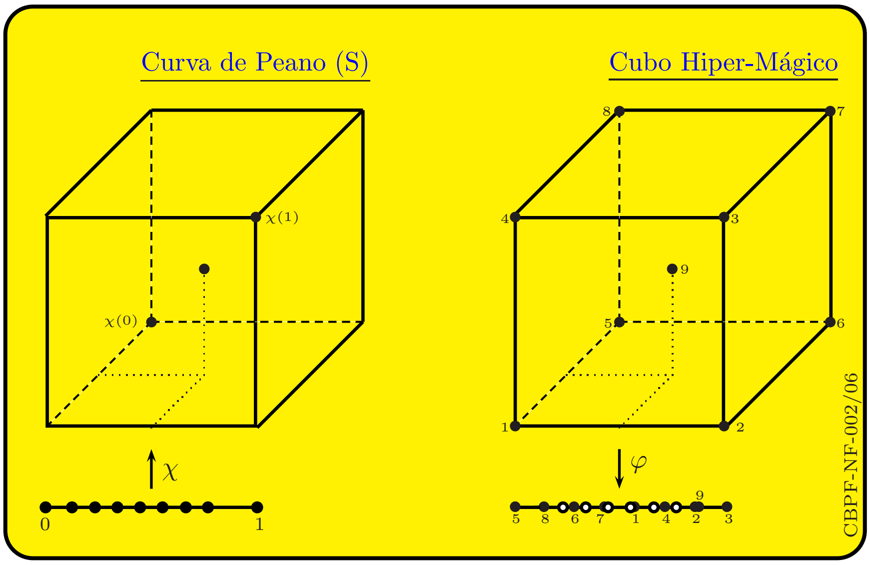


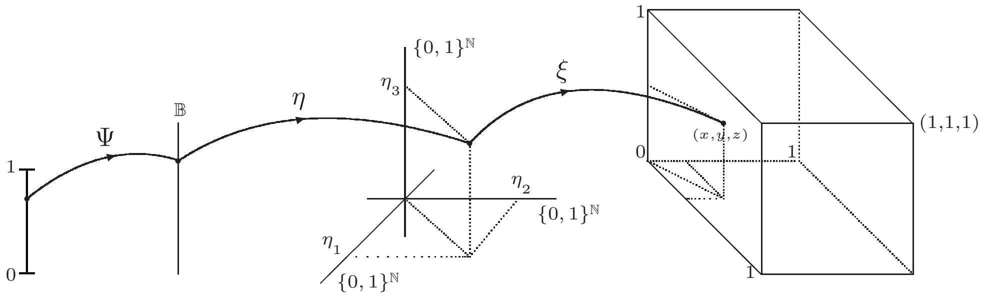
"O que a matemática pontua,
não raro a natureza corrobora."
Gentil (1º Bilhete)

Onde $\varphi = f \circ g \circ h$. Nesta figura tomamos o intervalo unitário coincidindo com a aresta inferior do quadrado.

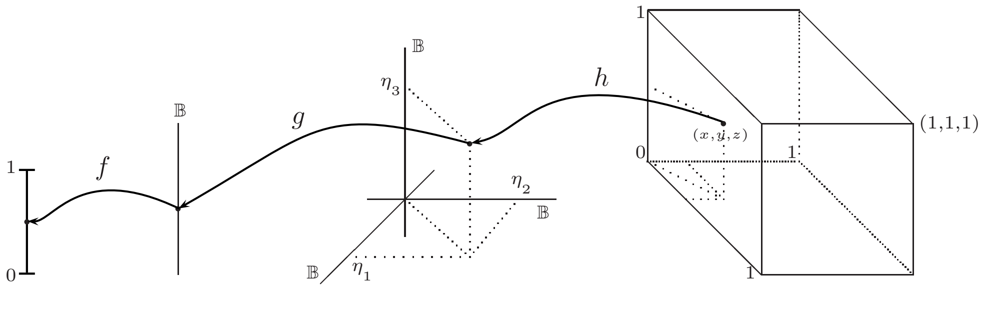
Observe que o quadrado hiper-mágico (φ) pode ser visto de uma outra perspectiva (ainda mais paradoxal): Transfere todos os pontos do quadrado para sua aresta inferior (ou qualquer outra), sem sobrepor um ponto a outro (φ é injetiva) e ainda sobram infinitos buracos na aresta! (φ é não sobrejetora).

Construimos também a curva de Peano no cubo e o cubo hiper-mágico. O cubo hiper-mágico transfere todos os pontos do cubo para uma de suas arestas, sem sobrepor um ponto a outro, e ainda sobram infinitos buracos na aresta!





- Curva de Peano no Cubo



- Cubo hiper-mágico

"Eu deveria logo dizer que discordo completamente daqueles que afirmam que o campo da matemática incorpora eternamente uma perfeição estática, e que as ideias matemáticas não são humanas, nem mutáveis. Ao contrário, esses estudos de caso, essas histórias intelectuais ilustram o fato de que a matemática está constantemente em evolução e mudança, e que nossa perspectiva, mesmo nas questões de matemática básica e mais aprofundada, se desloca, amiúde, de maneira surpreendente e inesperada. Tudo o que ela necessita é de uma nova ideia! Você precisa apenas estar inspirado e depois trabalhar feito louco para desenvolver sua nova concepção. De início, as pessoas irão combatê-lo, mas, se você estiver certo, então todos dirão, no fim de contas, que **obviamente** era o modo de encarar o problema, e que sua contribuição foi pequena ou nula! De certa maneira, este é o maior dos cumprimentos."

(Gregory Chaitin/Metamat!/pág. 30-Grifo nosso)

Teorema 1 (Teorema dos intervalos encaixados)**.** *Seja,*

$$[\,a_1,\,b_1\,] \supset [\,a_2,\,b_2\,] \supset \cdots \supset [\,a_n,\,b_n\,] \supset \cdots$$

uma seqüência de intervalos fechados, não-vazios e encaixados. Suponha, ademais, que a sucessão $(b_n - a_n)$ *dos comprimentos de tais intervalos tende a* 0*. Então, existe um único ponto comum a todos estes intervalos.*

Referências

[1] Figueiredo, Djairo Guedes de, *Análise I*. 2ª ed. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos, 1996.

[2] Lima, Elon Lages. *Espaços Métricos*. Rio de Janeiro: IMPA - CNPq,1993.

[3] Lima, Elon Lages. et alii *A Matemática do Ensino Médio* Vol. 1. Rio de Janeiro:SBM, 1997.

[4] Silva, Gentil Lopes. *Uma curva de Peano inédita* (*No quadrado* $[\,0,\,1\,[\,\times\,[\,0,\,1\,[$), www.dmat.ufrr.br/∼ gentil, 2006.

[5] Hefez, Abramo. *Curso de Álgebra, Volume* 1. Rio de Janeiro: IMPA - CNPq, 1993.

[6] Silva, Gentil Lopes. *Os Números Azuis*, www.dmat.ufrr.br/∼ gentil, 2008.

[7] Silva, Gentil Lopes. *Palestra*, www.dmat.ufrr.br/∼gentil ou ainda: www.somatematica.com.br

Boa Vista-RR/22.08.2008

"Eu agradeço os primores que eu recebo eu agradeço e só posso agradecer..." (`Mário/D. Deolinda`)