PALESTRA

Título: $0,999\ldots = 1$?

Introdução: Um dos resultados mais controversos de toda a matemática diz respeito à igualdade $0,999\ldots = 1$.

Na referência [1] o autor faz uma análise das representações decimais onde lemos:

"Comecemos com o caso mais simples, que é também o mais intrigante. Trata-se da expressão decimal, ou seja, do número real

$$\alpha = 0,\,999\ldots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \cdots$$

Afirmamos que $\alpha = 1$". (grifo nosso)

Na referência [2] lemos: "$[\cdots]$ você deve ter concluido que $0,999\ldots = 1$. Esse sinal de igual é igual mesmo! Não se trata de aproximação: $0,999\ldots$ e 1 são duas formas diferentes de apresentar o mesmo número". (grifo nosso)

Nesta palestra provaremos que $0,999\ldots = 0$ (não, não trata-se de um erro de digitação!) e que, portanto, todos os matemáticos estão equivocados ao afirmarem que:

$$0,999\ldots = 1, \quad \text{mesmo!}$$

Data: 01.09.2008
Local: UFRR/Bloco III/SALA 329/18 : 00 hs
Prof. Gentil
Nota: O ".pdf " deste arquivo encontra-se em: www.dmat.ufrr.br/~ gentil ∴ Artigos

Referências

[1] Lima, Elon Lages. et alii *A Matemática do Ensino Médio* Vol. 1. Rio de Janeiro: SBM, 1997.

[2] Brolezzi, Antonio Carlos/Monteiro, Martha Salerno, *Matemática: Números para quê?* Universidade de São Paulo, Publicação eletrônica.

Palestra

"E aquilo que nesse momento se revelará aos povos, surpreenderá a todos não por ser exótico mas pelo fato de poder ter sempre estado oculto quando terá sido o óbvio."
(O índio/Caetano V.)

Introdução: Decidi redigir um (pequeno) ensaio em função da palestra anunciada na página anterior, depois mudei de idéia e decidi ampliar o texto para disponibilizá-lo em minha home-page.

O objetivo desta palestra é esclarecer o significado da igualdade,

$$0,999\ldots = 1 \tag{1}$$

1 Igualdades espúrias

Inicialmente chamamos a atenção para o fato de que, na matemática, existem igualdades que na verdade não são igualdades. Ou ainda, que precisam ser colocadas em seu devido contexto. Como um primeiro exemplo citamos a seguinte "igualdade":

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{9} \tag{2}$$

Todos sabemos que estas não são frações iguais mas sim equivalentes, o que quer dizer que,

$$\frac{1}{3} \sim \frac{3}{9} \quad \Leftrightarrow \quad 1 \cdot 9 = 3 \cdot 3 \tag{3}$$

Outros exemplos de "igualdades espúrias" encontramos quando do estudo dos números complexos. A bem da verdade, *um número complexo é um par ordenado de números reais*. Em livros-texto nos deparamos com igualdades tipo,

$$z = 1 + 2i = (1,\, 2)$$

Ou,

$$z = (1,\, 0) = 1 + 0i = 1$$

Estas "igualdades" só podem ser devidamente compreendidas dentro do conceito de *isomorfismo entre estruturas algébricas*, um assunto pertinente à álgebra moderna; aqui só chamamos a atenção, nesta última igualdade, que é impossível (ilógico) um par ordenado ser igual a um número real. Por conseguinte, a rigor não é correto dizer que os $\mathbb{R}$eais são subconjunto dos $\mathbb{C}$omplexos, uma vez que estes "conjuntos" têm elementos de naturezas distintas.

Voltando à igualdade (2) entre frações, talvez o leitor nunca − em toda a sua vida − tenha sentido a necessidade de fazer distinção entre igualdade e equivalência entre frações. Confesso que eu, uma única vez senti esta necessidade, foi quando achei por bem corrigir uma questão em um gabarito de um cursinho. A questão era mais ou menos assim:

"Encontre uma fração (própria) x/y em que a soma do numerador com o denominador seja 12 e o produto seja 27".

Para resolver esta questão montamos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x+y &= 12 \\ x\cdot y &= 27 \end{cases}$$

cuja solução é: $x = 3$ e $y = 9$. Na prova foram dadas algumas alternativas:

(a) $----$

(b) $----$

(c) $----$

(d) $\frac{1}{3}$

(e) N.R.A

No gabarito a resposta "correta" foi dada como sendo a letra (d), a fração equivalente da correta. Fiz ver que esta não poderia ser a resposta porquanto a fração $\frac{x}{y} = \frac{1}{3}$ não satisfaz o enunciado do problema (não satisfaz o sistema). A resposta do gabarito foi mudada para a letra (e).

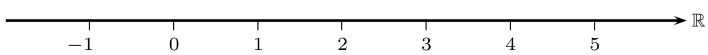
Pois bem, defendemos que os matemáticos − inclusive − por negligenciarem este contexto (das "igualdades espúrias"), não estão sabendo interpretar corretamente igualdades tipo (1); estas devem ser entendidas em seu devido contexto; o objetivo de nossa palestra é deixar claro este contexto.

2 Espaços métricos

Para "compreender" a interpretação legítima de igualdades tipo (1) devemos recorrer à teoria matemática dos espaços métricos.

Nota: Devido à heterogeneidade de público nesta palestra é que tentaremos conduzi-la de uma forma mais intuitiva, geométrica (para "leigos"). Embora aqui devamos considerar "argumentos topológicos" teremos em mente um "público alvo" a nível de **ensino médio**. Digo, o pré-requisito para o entendimento do essencial sobre o nosso ensaio é apenas a matemática secundária, nada mais que isto.

Pois bem, considere o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, cuja versão geométrica é:



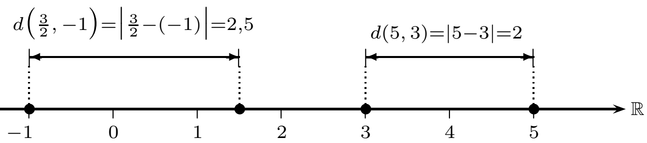
Entre pares de elementos $(x,\, y)$ deste conjunto vamos definir a seguinte função,

$$d(x,\, y) = |x-y|$$

Esta função calcula a distância entre elementos de $\mathbb{R}$. Por exemplo

$$d(5,\, 3) = |5-3| = 2\,; \qquad d\Big(\frac{3}{2},\, -1\Big) = \Big|\frac{3}{2} - (-1)\Big| = \frac{5}{2}.$$

Geometricamente, temos



Podemos provar que a função d, dada acima, satisfaz as seguintes propriedades:

$$(M_1)\;\; d(x,\, y) \geq 0 \;\text{ e }\; d(x,\, y) = 0 \iff x = y\,;$$
$$(M_2)\;\; d(x,\, y) = d(y,\, x)\,;$$
$$(M_3)\;\; d(x,\, y) \leq d(x,\, z) + d(z,\, y).$$

para quaisquer x, y e z em $\mathbb{R}$. Nestas condições dizemos que d é uma **métrica** sobre $\mathbb{R}$ e que $d(x,\, y)$ é a distância do ponto x ao ponto y. O par $(\mathbb{R},\, d)$ é um espaço métrico.

2.1 Medindo distâncias

Os matemáticos cedo perceberam a necessidade de estender este conceito a outros conjuntos além de $\mathbb{R}$.

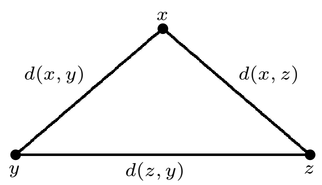
Generalizaram: espaço métrico é qualquer par $(M,\, d)$ onde M é qualquer conjunto e d é qualquer função satisfazendo às condições (M_1), (M_2) e (M_3) dadas anteriormente.

A exigência feita em (M_1) é bastante intuitiva: uma distância nunca é negativa; se a distância entre dois pontos é nula então, obrigatoriamente, estes pontos são o mesmo (são iguais), e; reciprocamente: a distância de um ponto para si mesmo deve ser nula.

A exigência feita em (M_2), também assaz intuitiva, foi tomada de empréstimo do dito popular que todos conhecemos: "fulano!! vem cá! E o fulano responde: vem cá tú, pois a distância daqui prá lá, é a mesma de lá prá cá".

Como se vê, qualquer um já possui, intuitivamente, os rudimentos para iniciar-se nos espaços métricos.

A exigência feita em (M_3), a menos intuitiva, é conhecida como *desigualdade triangular* e se inspira no fato de que na geometria elementar cada lado de um triângulo tem sempre medida menor que a soma das medidas dos outros dois lados.



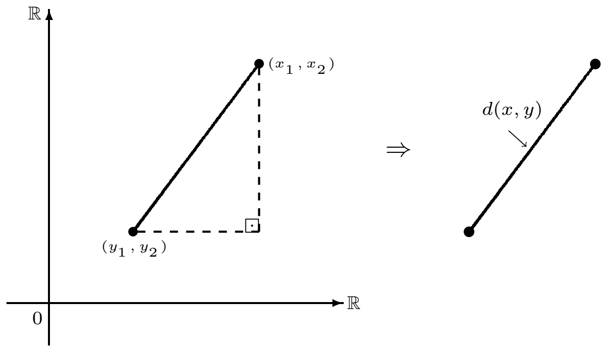
Em matemática, são abundantes os exemplos de espaços métricos. Vejamos mais alguns exemplos:

2.2 O "plano usual" (oficial)

Considere o plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ com a seguinte função,

$$d(x,\, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 \,+\, (x_2 - y_2)^2}$$

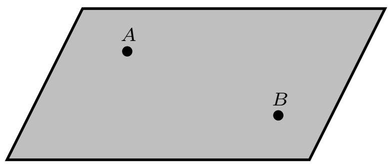
onde $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$. Podemos mostrar que esta função satisfaz a todas as exigências (M_1), (M_2) e (M_3), portanto adquire status de métrica sobre $\mathbb{R}^2$. Esta é a distância usual estudada na geometria analítica. Geometricamente esta distância é vista assim:



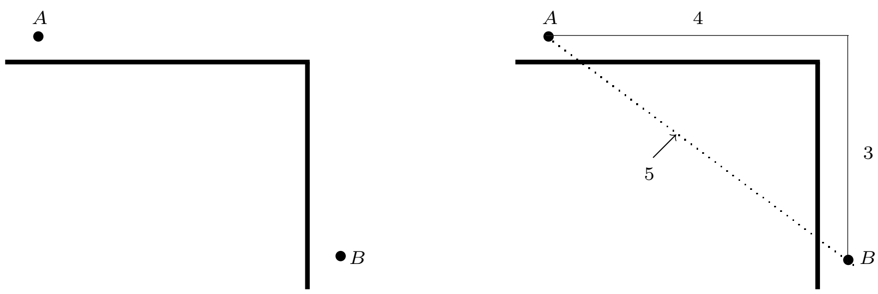
é dada pela hipotenusa do triângulo.

2.3 A métrica do "táxi"

Tentaremos convencer o leitor de que dados dois pontos em um plano, como na figura a seguir



surgem de maneira natural diferentes modos de se medir a distância entre estes pontos. De outro modo: em matemática (e também na física) não existe uma única maneira de se medir distâncias. Em outras palavras, a régua vendida em nossas livrarias, ou as trenas vendidas em nosso comércio não são os únicos instrumentos de medida. Vejamos um exemplo trivial do nosso dia-a-dia: o **táxi**. Suponhamos que alguém queira se deslocar (em um táxi) do ponto A ao ponto B − separados por uma esquina − e que o ponto B esteja a uma distância de quatro unidades para a direita e três unidades abaixo do ponto A, assim:



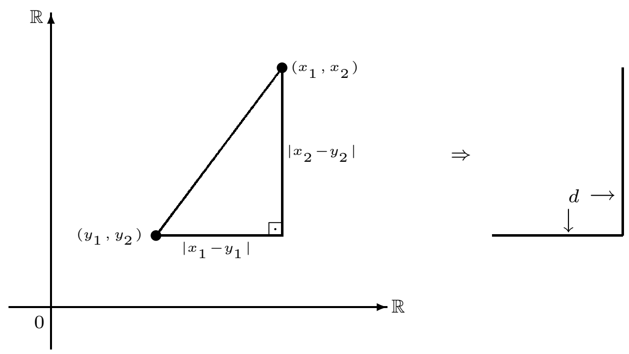
Pois bem, existem duas distâncias entre os pontos A e B: a que é mais conveniente (e justa) para o taxista, $4 + 3 = 7$; e a que seria mais conveniente para o passageiro: 5.

A métrica (medida) do táxi é também conhecida em matemática como métrica da soma. A outra distância (5) é a distância usual ou euclidiana, vista anteriormente.

A métrica do táxi é formalizada matemáticamente do seguinte modo: consideremos o mesmo plano cartesiano (euclidiano) $\mathbb{R}^2$ visto anteriormente e definamos, entre dois de seus pontos, a seguinte função:

$$d(x,\, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

onde $x = (x_1,\, x_2)$ e $y = (y_1,\, y_2)$. Podemos mostrar que esta função satisfaz a todas as exigências (M_1), (M_2) e (M_3), portanto adquire status de métrica sobre $\mathbb{R}^2$. A interpretação geométrica desta distância é vista assim:



é a soma dos catetos do triângulo. Observe que os dois espaços vistos nos fornecem diferentes distâncias para um mesmo par de pontos do plano, como não poderia deixar de ser. Por exemplo, seja calcular a(s) distância(s) entres os seguintes pares de pontos $x = (1,\, 1)$ e $y = (4,\, 5)$.

Então, no caso da distância usual (euclidiana), temos:

$$d(x,\, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

$$d\big((1,\, 1),\, (4,\, 5)\big) = \sqrt{(1-4)^2 + (1-5)^2} = 5.$$

A métrica do táxi nos fornece,

$$d(x,\, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$
$$d\big((1,\, 1),\, (4,\, 5)\big) = |1 - 4| \quad + |1 - 5| = 7.$$

Geometricamente, observamos:

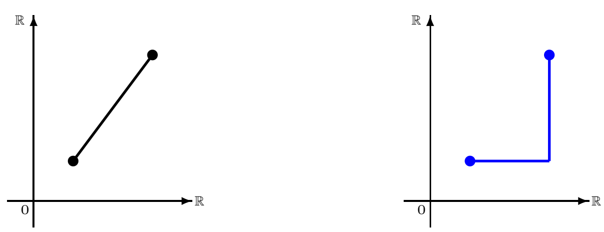
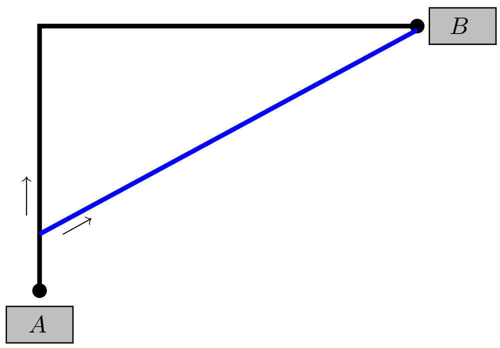


Figura 1: Distâncias diferentes para um mesmo par de pontos.

• Não existe uma distância mais ou menos verdadeira que outra

A estas alturas uma pergunta ingênua seria: *Em existindo mais que uma distância entre dois pontos,* **qual a verdadeira**?

Vamos responder esta pergunta de um modo que o leitor sinta na pele, por assim dizer, nosso argumento. Suponhamos que você deseja se deslocar, em seu local de trabalho, do prédio A para o prédio B e que entre ambos existem dois caminhos disponíveis, assim:



Ao chegar "no atalho" (bifurcação), você percebe que o caminho mais curto (linha reta) encontra-se sob um sol causticante e que o outro caminho encontra-se à sombra. Qual dos dois caminhos (distâncias) escolher?

Perceba aqui que o caminho (distância) deve ser escolhido segundo um critério particular (pessoal); nenhum é mais, ou menos, "verdadeiro" que o outro, apenas mais conveniente segundo um dado critério. Por exemplo, se o leitor tem tempo de sobra e não quer suar, deve escolher o caminho mais longo; por outro lado, se tem pressa e não se importa com o calor o caminho mais curto (euclidiano, "usual") deve ser o escolhido.

Do ponto de vista da matemática, isto é, da lógica, todas as métricas gozam do mesmo status. O que acontece é que a métrica (trena) usual é a mais conveniente para, por exemplo: o pedreiro, o carpinteiro, para o engenheiro civil, etc., porque esta é suficiente para resolver todos os seus problemas de medida. Já para o matemático e o físico, estes profissionais têm necessidade − em seus trabalhos − de "outras réguas", as quais não se encontram no comércio, pois são, por assim dizer, abstratas.

A propósito, acontece − no que diz respeito às métricas − o mesmo que ocorre no âmbito das geometrias euclidiana e não-euclidianas. A de Euclides não é nem mais nem menos verdadeira que as outras; pode ou não ser a mais conveniente a determinados propósitos; por exemplo, Einstein ao formular sua Teoria da Relatividade (Gravitação) preferiu optar por uma das geometrias não-euclidianas (optou pela geometria riemanniana).

Por oportuno, para o propósito que temos agora em vista: *provar que os matemáticos estão redondamente enganados quanto ao significado da igualdade*

$$0,999\ldots = 1,$$

utilizaremos uma métrica que não é a euclidiana, esta não serve a nossos propósitos.

2.4 A Métrica Divina (ou quântica)

Consideremos a seguinte aplicação

$$\Bbbk\colon [\,0,\,1\,[\,\times\,[\,0,\,1\,[\longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por,

$$\Bbbk(x,\,y) = \min\big\{|x-y|,\,1-|x-y|\big\}$$

No apêndice (pág. 36) provamos que $\Bbbk$ é uma métrica em $[\,0,\,1\,[$.

Nota: O "min", na fórmula acima, significa "*menor*", devemos tomar o menor valor entre os dois que aparecem entre chaves.

Observe por que devemos excluir o extremo direito do intervalo unitário: isto se deve a que, caso contrário,

$$\begin{aligned}\Bbbk(1,\,0) &= \min\big\{\,|1-0|,\,1-|1-0|\,\big\}\\ &= \min\big\{\,1,\,0\,\big\} = 0\end{aligned}$$

o que estaria em flagrante desrespeito à exigência (M_1) da definição de métrica, digo:

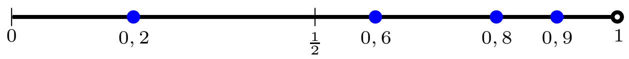
$$d(x,\,y)=0\ \Rightarrow\ x=y.$$

Esta métrica é de fácil manipulação e funciona assim: dados dois pontos x e y, ambos no intervalo $[\,0,\,1\,[$, entre chaves obteremos dois valores: escolhemos o menor deles como sendo a distância entre os pontos x e y. Por exemplo,

$$\Bbbk(0,2;\,0,6) = \min\big\{\,|0,2-0,6|,\,1-|0,2-0,6|\,\big\} = \min\big\{\,0,4;\,0,6\,\big\} = 0,4$$

$$\Bbbk(0,2;\,0,8) = \min\big\{\,|0,2-0,8|,\,1-|0,2-0,8|\,\big\} = \min\big\{\,0,6;\,0,4\,\big\} = 0,4$$

$$\Bbbk(0,2;\,0,9) = \min\big\{\,|0,2-0,9|,\,1-|0,2-0,9|\,\big\} = \min\big\{\,0,7;\,0,3\,\big\} = 0,3$$



Por oportuno, observe que,

$$\Bbbk\,(\,0,2;\,0,6\,) = \Bbbk\,(\,0,2;\,0,8\,) > \Bbbk\,(\,0,2;\,0,9\,). \tag{4}$$

É isto mesmo que o leitor presencia!: a *distância* entre o primeiro e o segundo ponto $-$ no diagrama acima $-$ é igual à distância entre o primeiro e o terceiro ponto que ... pasmem! é maior que a distância entre o primeiro e o quarto ponto!

Poderíamos, com inteira razão, chamá-la de "métrica maluca" ou até, quem sabe, "métrica hiper-maluca".

No entanto, vejamos o que o eminente filósofo tem a nos dizer a este respeito,
"*Tudo isso, que à primeira vista parece excesso de irrazão, na verdade é o efeito da finura e da extensão do espírito humano e o método para encontrar verdades até então desconhecidas.*" (Voltaire/17ª Carta)

De fato, as palavras do filósofo me serviram, amiúdo, de apoio psicológico quando $-$ a princípio $-$ me sentir tentado a desdenhar a "métrica maluca"!

Para considerações posteriores vamos calcular a distância de um ponto arbitrário $x \in [\,0,\,1\,[$ ao ponto 0 (origem), assim

$$\Bbbk(x,\,0) = \min\left\{\,|x-0|,\,1-|x-0|\,\right\} = \min\left\{\,|x|,\,1-|x|\,\right\}$$

Como $0 \leq x < 1$, temos $|x| = x$, logo,

$$\Bbbk(x,\,0) = \min\left\{\,x,\,1-x\,\right\} \tag{5}$$

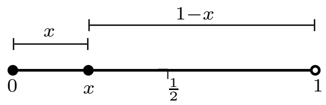
Temos,

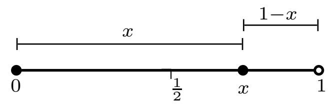
$$x \leq 1-x \quad \Leftrightarrow \quad x \leq \frac{1}{2}$$

Sendo assim, podemos escrever:

$$\Bbbk(x,\,0) = \min\left\{\,x,\,1-x\,\right\} = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ 1-x, & \text{se } \frac{1}{2} < x < 1. \end{cases} \tag{6}$$

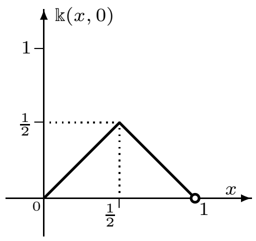
Esta equação nos diz, simplesmente, que se x é um ponto na primeira metade do intervalo, então sua distância para a origem é igual "a ele próprio". Se x é um ponto na metade direita do intervalo, então sua distância para a origem é $1-x$. Veja,

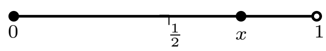


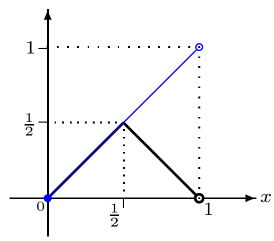


- $\Bbbk(x,\,0) = \min\left\{\,x,\,1-x\,\right\} = x$
- $\Bbbk(x,\,0) = \min\left\{\,x,\,1-x\,\right\} = 1-x$

A seguir (à esquerda) esboçamos o gráfico da função dada por $\Bbbk(x,\,0)$:

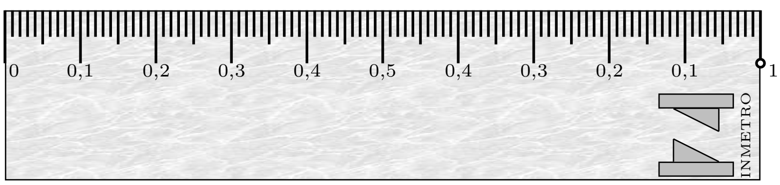






Este gráfico nos mostra como varia a distância de um ponto arbitrário x à origem. Na figura da direita plotamos, para efeito de comparação, as duas métricas: a usual (euclidiana) e a divina.

A partir do gráfico acima (esquerda) podemos construir a "régua oficial" do "universo" $\big(\,[\,0,\,1\,[,\,\Bbbk\,\big)$ − `Régua Divina`, assim:

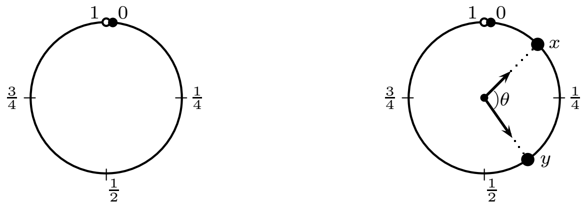


Observe que a nossa régua já foi homologada junto ao Inmetro porquanto a função $\Bbbk$ satisfaz a todas as condições (exigidas) para que seja uma distância.

Observe, ademais, que a régua Divina coincide com a régua usual só até a metade, a partir daí as duas diferem radicalmente.

2.4.1 A métrica divina curva o espaço

Vamos curvar o intervalo $[\,0,\,1\,[$ segundo um relógio de comprimento 1, ou ainda, de raio $2\pi r = 1$, assim

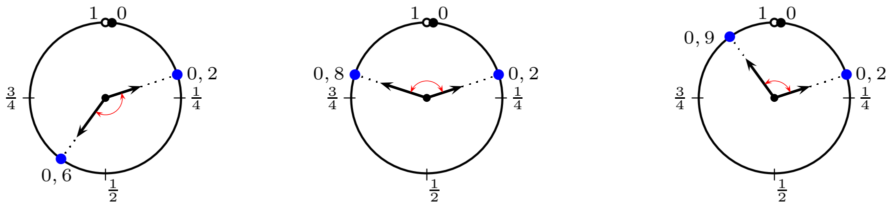


Pois bem, definindo a "distância angular" entre os ponteiros como sendo o menor dos angulos θ e $360^{\text{o}} - \theta$, isto é

$$d(x,\,y) = \min\{\,\theta,\,360^{\text{o}} - \theta\,\}$$

teremos uma idéia de como funciona a métrica divina. É isto o que significa dizer que a métrica curva o espaço.

Nas figuras seguintes ilustramos as relações dadas em (4) (pág. 8),



Nota: No artigo [7] justificamos o por que do nome alternativo: Métrica quântica.

3 A igualdade $0,999\ldots = 1$ vista sob a métrica divina

Para convencer o leitor do verdadeiro sentido da igualdade $0,999\ldots = 1$ necessitamos ainda de dois conceitos matemáticos: sequências e séries.

3.1 Sequências

Este assunto consta no conteúdo da matemática de ensino médio, por exemplo quando do estudo das progressões aritméticas e geométricas. Para os nossos propósitos, definiremos

Definição 1 (Sequência)**.** *Seja $M \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio, chamaremos de sequência de termos em M, ou apenas* **sequência em** M *a qualquer função*

$$\begin{aligned} a\colon \mathbb{N} &\longrightarrow M \\ n &\longmapsto a(n) \end{aligned}$$

Para representar a sequência $a\colon \mathbb{N} \longrightarrow M$ usaremos uma das notações a seguir

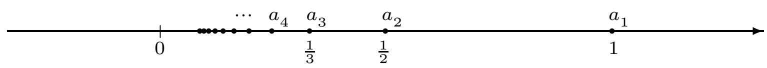
$$(a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots) \text{ ou } \big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ou } \big(a_n\big).$$

A imagem de $n \in \mathbb{N}$ pela função a, isto é, $a(n)$, será indicada por a_n; é o n-ésimo termo da sequência. Exemplos:

- Seja $M = [\,0,\,1\,]$ e $(\,a_n\,)$ a sequência dada por, $a_n = \dfrac{1}{n} \in [\,0,\,1\,]$. Temos,

$$(\,a_n\,) = (1,\, \frac{1}{2},\, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{1000}, \ldots)$$

Esta sequência pode ser "vista" da seguinte forma:



– Subespaços

Dado um espaço métrico $(M,\, d)$ podemos, a partir deste, obter tantos espaços quantos são os subconjuntos (não-vazios) de M. Definimos,

Se $(M,\, d)$ é um espaço métrico e $N \subset M$ então o par $(N,\, d)$ é chamado subespaço de $(M,\, d)$.

Por exemplo, como $[\,0,\,1\,] \subset \mathbb{R}$ temos que $(\,[\,0,\,1\,],\,\mu)$ é um subespaço do espaço $(\mathbb{R},\,\mu)$, onde μ é métrica usual (euclidiana) de $\mathbb{R}$, isto é: $\mu(x,\,y) = |x-y|$.

– Convergência de sequências

Observe, na figura anterior, que os termos da sequência aproximam-se arbitrariamente do ponto 0. A distância (usual) entre os termos da sequência e o ponto 0 aproxima-se de zero, assim:

$$d(a_n,\,0) = |a_n - 0| = \Big|\frac{1}{n} - 0\Big| = \frac{1}{n} \to 0$$

Dizemos: quando $n \to \infty$, $\frac{1}{n} \to 0$.

– Num espaço métrico $(M,\, d)$ dizemos que uma sequência $(\,a_n\,)$ converge para um ponto $p \in M$ quando, como na sequência acima, a distância entre os termos da sequência e o ponto p tende (aproxima-se) de zero, em símbolos:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = p \quad \Longleftrightarrow \quad d(a_n,\,p) \to 0.$$

Importante!

Uma observação óbvia, mas importante, é que a convergência de uma sequência depende da métrica considerada (adotada) no espaço, como teremos oportunidade de exemplificar oportunamente.

3.2 Séries

Este tema também já comparece no ensino médio quando procuramos por exemplo pela "soma infinita",

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

que é dada pela fórmula da soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$$

válida sempre que $-1 < q < 1$. No caso da série anterior, temos,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1 \tag{7}$$

Formalizando a "teoria das séries", temos: Seja (a_n) uma sequência de números reais. A partir dela, formamos uma nova sequência (s_n) cujos termos são as somas:

$$\begin{aligned}
s_1 &= a_1\\
s_2 &= a_1 + a_2\\
s_3 &= a_1 + a_2 + a_3\\
&- - - - - - - - - - - - - - -\\
s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n
\end{aligned}$$

Os termos da sequência (s_n) são chamados somas parciais da série infinita $\sum a_n$.

Se existir o limite,

$$\lim s_n = \lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)$$

diremos que a série $\sum a_n$ é convergente e, nesse caso, $\lim s_n = \ell$ é chamado de soma da série. Em sendo este o caso, escrevemos,

$$\ell = \sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

Se a sequência (s_n), de somas parciais, não convergir, diremos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

Resumindo: A soma de uma série $\sum a_n$ é simplesmente o limite da sequência (s_n) de somas parciais.

A título de exemplo, vamos calcular a soma da série vista em (7), para tanto vamos encontrar sua sequência de somas parciais, assim:

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{1}{2}\\
s_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\\
s_3 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\\
&- - - - - - - - - - - - - - -\\
s_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}
\end{aligned}$$

Vamos necessitar da fórmula da soma dos n primeiros termos de uma P.G.:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Então,

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\Big(\big(\frac{1}{2}\big)^n - 1\Big)}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \big(\frac{1}{2}\big)^n$$

Para provar que esta sequência converge para 1 na métrica usual, devemos mostrar que $d(s_n, 1) \to 0$. De fato,

$$d(s_n, 1) = \mu(s_n, 1) = |s_n - 1| = \Big|1 - \big(\frac{1}{2}\big)^n - 1\Big| = \frac{1}{2^n} \to 0$$

– Esta sequência converge para 0 porque "*podemos tornar* $\frac{1}{2^n}$ *arbitrariamente pequeno, tomando n suficientemente grande*".

Vamos agora provar que esta mesma série converge para 0 na métrica divina, isto é,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 0$$

Com efeito, é suficiente provar que $\Bbbk(s_n, 0) \to 0$, assim*:

$$\begin{aligned} \Bbbk(s_n, 0) &= \min\big\{\, s_n,\, 1 - s_n \,\big\} \\ &= \min\Big\{\, 1 - \frac{1}{2^n},\, 1 - \big(1 - \frac{1}{2^n}\big) \,\Big\} \\ &= \min\Big\{\, 1 - \frac{1}{2^n},\, \frac{1}{2^n} \,\Big\} = \frac{1}{2^n} \to 0 \end{aligned}$$

Observe que,

$$\frac{1}{2^n} \leq 1 - \frac{1}{2^n} \quad \Leftrightarrow \quad 2^n \geq 2.$$

Agora vamos calcular a soma da série:

$$0,999\ldots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \cdots$$

Neste caso, para o cálculo na métrica usual basta usar a fórmula da soma dos infinitos termos de uma P.G., entretanto, vamos calcular em nosso contexto de espaços métricos; para tanto necessitaremos da sequência de somas parciais:

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{9}{10} \\ s_2 &= \frac{9}{10} + \frac{9}{100} \\ &-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,- \\ s_n &= \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \cdots + \frac{9}{10^n} \end{aligned}$$

*Veja equação (6), pág. 9

Aplicando a fórmula da P.G., obtemos:

$$s_n = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \cdots + \frac{9}{10^n} = 9 \cdot \Big(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots + \frac{1}{10^n}\Big)$$

$$= 9 \cdot \frac{\frac{1}{10}\big(\frac{1}{10^n} - 1\big)}{\frac{1}{10} - 1} = 1 - \frac{1}{10^n}$$

Vamos mostrar que a série em questão converge para 1 na métrica euclidiana, com efeito,

$$\mu(s_n,\, 1) = \Big|1 - \frac{1}{10^n} - 1\Big| = \frac{1}{10^n} \to 0$$

Vamos provar que esta mesma série converge para 0 na métrica $\Bbbk$, com efeito,

$$\begin{aligned}\Bbbk(s_n,\, 0) &= \min\big\{\, s_n,\, 1 - s_n \,\big\}\\ &= \min\Big\{\, 1 - \frac{1}{10^n},\, 1 - \Big(1 - \frac{1}{10^n}\Big) \Big\}\\ &= \min\Big\{\, 1 - \frac{1}{10^n},\, \frac{1}{10^n} \Big\} = \frac{1}{10^n} \to 0\end{aligned}$$

Observe que,

$$\frac{1}{10^n} < 1 - \frac{1}{10^n} \quad \Leftrightarrow \quad 10^n > 2.$$

Em resumo, provamos que:

$$0,999\ldots = 1$$
$$0,999\ldots = 0$$

Uma exegese de nossos resultados

Observe que não podemos concluir apressadamente que $1 = 0$, porquanto estes resultados pertencem a universos distintos:

$$0,999\ldots = 1, \quad \text{em} \quad ([\,0,\,1\,],\, \mu) \tag{8}$$

$$0,999\ldots = 0, \quad \text{em} \quad ([\,0,\,1\,[,\, \Bbbk) \tag{9}$$

Um primeiro corolário que se segue deste resultado é que $0,999\ldots$ não é um número porquanto depende da topologia (métrica) adotada. Esta conclusão contraria a afirmativa do prof. Elon:

"Trata-se da expressão decimal, ou seja, do número real

$$\alpha = 0,\,999\ldots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \cdots$$

Afirmamos que $\alpha = 1$."

Reiteramos: Um número é um conceito algébrico, não topológico; digo, não pode variar com a topologia (métrica/distância) adotada.

A conclusão é óbvia: a "entidade" $0,\,999\ldots$ só pode ser vista como uma **série** (ou uma *representação decimal*, não faz mal)* e nunca como um número.

*Queira por favor lêr a citação em epígrafe deste artigo.

A igualdade (8) nos diz que a soma desta série é 1 na métrica μ; de igual modo, a igualdade (9) nos diz que a soma desta mesma série é 0 na métrica $\Bbbk$.

Donde se conclui que o prof. comete o equívoco de confundir a série com seu limite.

Observe que em nosso universo $([\,0,\,1\,[,\,\Bbbk)$ não estão definidas operações algébricas, razão por que não podemos sair multiplicando a esmo. Entretanto, observando que se $0 \leq x < 1$ e $0 \leq y < 1$ então $0 \leq x \cdot y < 1$ significa que em nosso universo, a multiplicação,

$$\cdot : [\,0,\,1\,[\times[\,0,\,1\,[\longrightarrow\,[\,0,\,1\,[$$

é uma operação perfeitamente lícita.

Se $1 \neq 0$ então $0,999\ldots$ não é um número

Dissemos anteriormente que, a despeito das igualdades $0,999\ldots = 1$ e $0,999\ldots = 0$, não podemos concluir que $1 = 0$ por conta de que estes resultados estão em universos distintos; entretanto, podemos cavar uma contradição caso insistamos no disparate de acreditar em miragens (fantasmas), digo: confundir uma série com seu limite.

Vamos estabelecer agora mais um limite que será útil em nossos argumentos posteriores. Consideremos a seguinte série,

$$0,111\ldots = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots + \frac{1}{10^n} + \cdots$$

cuja sequência de somas parciais é dada assim,

$$\beta_n = \frac{1}{9}\cdot\Big(1 - \frac{1}{10^n}\Big)$$

Afirmamos que esta sequência converge para $1/9$ na métrica $\Bbbk$. De fato,

$$\Bbbk(\beta_n,\,1/9) = \min\Big\{\big|\beta_n - \frac{1}{9}\big|,\,1 - \big|\beta_n - \frac{1}{9}\big|\Big\}$$

ou ainda,

$$\Bbbk(\beta_n,\,1/9) = \min\Big\{\big|\frac{1}{9} - \frac{1}{9\cdot 10^n} - \frac{1}{9}\big|,\,1 - \big|\frac{1}{9} - \frac{1}{9\cdot 10^n} - \frac{1}{9}\big|\Big\}$$

$$= \min\Big\{\frac{1}{9\cdot 10^n},\,1 - \frac{1}{9\cdot 10^n}\Big\} = \frac{1}{9\cdot 10^n} \to 0$$

Portanto,

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots + \frac{1}{10^n} + \cdots = \frac{1}{9} \tag{10}$$

O próximo teorema rompe um paradigma de alguns séculos:

Teorema 1 (Gentil/15.08.2008)**.** *Se* $0,999\ldots$ *é um* **número** *então* $1 = 0$.

Prova: De fato, consideremos a igualdade,

$$0,999\ldots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \cdots + \frac{9}{10^n} + \cdots = 0,$$

demonstrada anteriormente; sendo $0,999\ldots$ por hipótese um número, esta igualdade nos diz que este número é igual a zero, vamos multiplicá-lo por $1/9$, obtendo:

$$0,111\ldots = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots + \frac{1}{10^n} + \cdots = 0.$$

Deste resultado e da equação (10) concluimos que, $\frac{1}{9} = 0$, donde $1 = 0$. ■

4 A evolução dos conceitos em matemática

É fato notório que muitos dos conceitos matemáticos vieram evoluindo ao longo dos séculos. Por exemplo, no século XVIII o conceito de **função** ainda não havia sido compreendido de modo satisfatório pelos matemáticos de então. Daniel Bernoulli (1700-1782), d'Alembert (1717-1783) e Euler (1707-1783) se envolveram em algumas controvérsias inconclusivas, cada um mantendo sua própria opinião, justamente porque eles não dispunham de um conceito satisfatório de função − A definição atual de função é obra do século XIX. ([13])

Como um outro exemplo, em [12], lemos:

A ambivalência dos matemáticos do século XVIII em relação aos números complexos pode mais uma vez ser evidenciada em Euler. Apesar de seus trabalhos em que ensinava a operar com eles, afirma

"Como todos os números concebíveis são maiores ou menores do que zero ou iguais a zero, fica então claro que as raízes quadradas de números negativos não podem ser incluídas entre os números possíveis [números reais]. E esta circunstância nos conduz ao conceito de tais números, os quais, por sua própria natureza, são impossíveis, e que são geralmente chamados de números imaginários, pois existem somente na imaginação."

− É assaz curioso, como se deduz desta citação, que em pleno século XVIII matemáticos do porte de Euler (e, por extensão, os demais) não tinham uma idéia clara do que fosse um número! É isto mesmo, não sabiam o que era um número!

Enquanto o conceito de *função* hoje encontra-se "fechado", digo, a definição de função é plenamente satisfatória, a minha tese é a de que o mesmo não acontece com o conceito (definição) de número; digo, no meu entendimento, os matemáticos ainda hoje tropeçam no importante conceito de *número*. Enfatizo: o leitor estaria equivocado se pensasse que os matemáticos de hoje (início do século XXI) estivessem mais à vontade com este conceito!

Dentre outras razões, a minha tese se fundamenta no fato de que os matemáticos − a exemplo dos dois citados na capa deste trabalho − estiveram equivocados durante "todo este tempo" − ao afirmarem que $0,999\ldots$ é um número − parece mentira, eles não sabem o que é um número (não têm uma idéia distinta).

Observe que o próprio Peano* ao encetar sua construção dos números naturais toma "número" como um *conceito primitivo*, podemos desconfiar de que ele − a exemplo de Euler − não sabia o que era um número.

*Giuseppe Peano (1858−1932), natural de Cuneo, Itália, foi professor da Academia Militar de Turin, com grandes contribuições à Matemática. Seu nome é lembrado hoje em conexão com os *axiomas de Peano* para a construção dos números naturais.

Óbviamente que quando se fala daquilo que não se compreende corre-se o risco de proferir tolices. Foi o que aconteceu a respeito de $0,999\ldots = 1$.

Eu, particularmente, construi "para os meus propósitos" uma definição de número a qual tem me rendido bons frutos (ver apêndice, pág. 22).

Quem tem "olhos para enxergar" há de perceber que a igualdade $0,\,999\ldots = 0$ forçará toda uma mudança de perspectiva na matemática (uma quebra de paradigma, como dizem os mais cultos); é como uma jogada forçada no xadrez: o adversário terá que fazê-la sob pena de aumentar seus prejuízos...

Toda a celeuma que girou, até hoje, em torno da igualdade $0,\,999\ldots = 1$ se deve apenas ao equívoco de se confundir uma série com seu limite e, ademais, ignorarem o que seja um número.

Por conta desta confusão os *terráqueos*, até hoje (melhor dizendo, até ontem), não compreenderam o verdadeiro significado de $0,999\ldots = 1$. Acreditavam que, por ser $0,999\ldots$ um número real, deveria situar-se em algum ponto da reta real. O símbolo $0,999\ldots$ não pode ser localizado em parte alguma da reta − Insistindo mais um pouco (pág. 61 de [4]):

"A igualdade $1 = 0,999\ldots$ costuma causar perplexidade aos menos experientes. A única maneira de dirimir o aparente paradoxo é **esclarecer** que o símbolo $0,999\ldots$ na realidade significa o número cujos valores aproximados são $0,9$, $0,99$, $0,999$ etc. E, como vimos acima, esse número é 1." (grifo nosso)

Quando os próprios autores misturam os conceitos não é de admirar que os menos experientes fiquem perplexos (desorientados, confusos).

Estribados no teorema 1 damos a seguinte versão (paráfrase) da assertiva anterior :

"A igualdade $1 = 0,999\ldots$ costuma causar perplexidade aos menos experientes. A única maneira de dirimir o aparente paradoxo é esclarecer que o símbolo $0,999\ldots$ na realidade significa uma série cujas *reduzidas* são $0,9$, $0,99$, $0,999$ etc., e cuja soma é 1."

Reitero: o que o nosso teorema mostra é que confundir uma série com seu limite não é uma "*brincadeira sem importância*", é tão grave quanto confundir $1 = 0$.

− Óbviamente que nossa conclusão a respeito da representação decimal $0,999\ldots$ se estende a todas as outras; por exemplo: $0,4999\ldots$ pelas mesmas razões não é um número.

A propósito, podemos mostrar que a aplicação,

$$\Bbbk\colon [\,0,\ 1/2\,[\,\times\,[\,0,\ 1/2\,[\longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$\Bbbk(x,\,y) = \min\big\{|x-y|,\ 1/2-|x-y|\big\}$$

é uma métrica; portanto o par $([\,0,\ 1/2\,[,\ \Bbbk)$ é um espaço métrico. Neste espaço não é difícil provar a seguinte igualdade:

$$\boxed{0,4999\ldots = 0}$$

De fato, a sequência de somas parciais desta série,

$$0,4,\quad 0,49,\quad 0,499,\quad 0,4999,\ldots$$

é dada por $\gamma_n = 1/2 - 1/10^n$, sendo assim, temos:

$$\Bbbk(\gamma_n,\, 0) = \min\big\{|\gamma_n - 0|,\, 1/2 - |\gamma_n - 0|\big\} = \frac{1}{10^n} \to 0$$

- Podemos ainda mostrar que a aplicação,

$$\Bbbk\colon\, [\,0,\, 1/3\,[\times[\,0,\, 1/3\,[\longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$\Bbbk(x,\, y) = \min\big\{|x-y|,\, 1/3 - |x-y|\big\}$$

é uma métrica; portanto o par $([\,0,\, 1/3\,[,\, \Bbbk)$ é um espaço métrico. Neste espaço não é difícil provar a seguinte igualdade:

$$\boxed{0,333\ldots = 0} \tag{11}$$

De fato, a sequência de somas parciais desta série,

$$0,3, \quad 0,33, \quad 0,333, \quad 0,3333, \ldots$$

é dada por $\xi_n = 1/3 - 1/(3\cdot 10^n)$, sendo assim, temos:

$$\Bbbk(\xi_n,\, 0) = \min\big\{|\xi_n - 0|,\, 1/3 - |\xi_n - 0|\big\} = \frac{1}{3\cdot 10^n} \to 0$$

Conclusão: o resultado (11) nos força a ver $0,333\ldots$ não como um número, mas como uma **série**, porquanto depende da topologia considerada.

Veja ainda, a igualdade

$$0,\,999\ldots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \cdots = 0$$

não significa que "a soma de infinitas parcelas positivas é igual a zero"; o verdadeiro significado desta igualdade é que a sequência $\alpha_n = 1 - \frac{1}{10^n}$, de somas parciais da série, converge para 0 na métrica $\Bbbk$, é só isto!

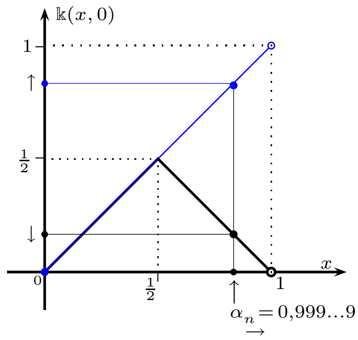
4.1 A igualdade $0,999\ldots = 0$ e a teoria da gravitação de Einstein

Os que gozam de uma *acuidade visual* razoável não terão dificuldade de enxergar que o paradigma quebrado pelo teorema 1 de certa forma é similar ao paradigma quebrado pela teoria da gravitação de Einstein relativamente à de Newton. De fato, na teoria de Newton, por exemplo, sempre se acreditou que a luz se propagava em linha reta (não fazia curva) por conta de que esta teoria era fundamentada na geometria euclidiana; já a de Einstein em uma "geometria curva": a massa introduz uma curvatura (distorção) no espaço circunjacente. De igual modo, sempre se acreditou que $0,999\ldots = 1$ por conta de que esta igualdade esteve sempre atrelada à geometria, digo, métrica euclidiana (esta não curva o espaço); quando introduzimos uma métrica que *curva o espaço*, como é o caso da métrica $\Bbbk$, aí se revelou a verdadeira natureza de $0,999\ldots$, curva-se tal como um raio de luz em uma nova geometria!

Conclusão: A miopia (catarata) que grassou durante todos estes séculos a respeito da igualdade $0,999\ldots = 1$ foi decorrência de se ter acreditado que $0,999\ldots$ era independente da "geometria" (métrica) considerada; a igualdade $0,999\ldots = 0$ desfaz este equívoco.

"*Tudo isso, que à primeira vista parece excesso de irrazão, na verdade é o efeito da finura e da extensão do espírito humano e o método para encontrar verdades até então desconhecidas.*" (Voltaire)

A figura a seguir nos mostra, de uma outra perspectiva, como a convergência da representação $0,999\ldots$ depende da geometria do espaço,



A reta em azul representa a geometria (distância) euclidiana. Observe que a métrica $\Bbbk$ introduz uma "curvatura" no espaço $[\,0,\,1\,[$.

4.2 Estendendo nossa exegese/Na Internet

Fizemos uma rápida pesquisa na internet a respeito das *representações decimais* e pudemos constatar que trata-se de uma verdadeira **torre de babel**, ninguém se entende a este respeito; vamos continuar nossa exegese considerando algumas questões.

− Em [11] lemos: "[...] você deve ter concluido que $0,999\ldots = 1$". Este sinal de igual **é igual mesmo!** Não se trata de aproximação: $0,\overline{9}$ e 1 são duas formas diferentes de representar **o mesmo número**. (grifo nosso)

• Objeção: já vimos que o símbolo $0,999\ldots$ depende da *topologia* considerada, portanto não é um número, é uma série cuja soma é 1 ou 0, a depender da métrica escolhida.

− A seguinte questão foi abordada em 2002 no Exame Nacional de Cursos-Provão/MEC como sendo uma das questões chamadas de objetivas destinadas para o bacharelado e para a licenciatura em Matemática:

No texto a seguir há uma argumentação e uma conclusão.

Como $\frac{1}{3} = 0,333\ldots$, multiplicando ambos os membros por 3 encontramos $1 = 0,999\ldots$ Portanto $0,999\ldots = 1$. Assim podemos afirmar que:

a) a conclusão está incorreta, pois $0,999\ldots < 1$;

b) a argumentação está incorreta, pois $\frac{1}{3}$ não é igual a $0,333\ldots$;

c) a argumentação está incorreta, pois $3 \cdot 0,333\ldots$ não é igual a $0,999\ldots$;

d) a argumentação e a conclusão estão incorretas;

e) a argumentação e a conclusão estão corretas.

A alternativa correta foi dada como sendo a letra **e)**. Aqui ainda temos um comentário a fazer. No estudo das *séries numéricas* temos o seguinte *teorema*:

"Se $\sum a_n$ converge então, para todo r real, tem-se $\sum(ra_n)$ convergente, com $\sum(ra_n) = r\sum a_n$".

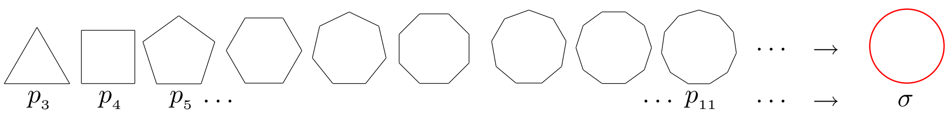
• Então, dentro do nosso contexto, a questão acima está correta apenas do ponto de vista das séries (convergência), assim:

"Se a soma da série $0,333\ldots$ é $\frac{1}{3}$ então a soma da série $0,999\ldots$ é 1."

Isto está correto de acordo com o teorema anterior. Entretanto, se o objetivo da questão foi provar que $0,999\ldots = 1$ mesmo! (como acredita o autor anterior), então a resposta correta seria a letra **b)**: a argumentação está incorreta, pois $\frac{1}{3}$ não é igual a $0,333\ldots$ (mesmo!)

Ainda na internet me deparei com a seguinte "prova" de que $0,999\ldots = 1$: "Tente escrever um número x tal que $0,999\ldots < x < 1$, verá que é impossível. Dado que não existe um tal x em $\mathbb{R}$ então $0,999\ldots = 1$."

• Esta é uma "prova" por demais ingênua. De fato, nunca poderemos exibir um tal x simplesmente porque $0,999\ldots$ não é um número, isto é, não encontra-se na reta real. Para vermos a ingenuidade desta prova de um outro ângulo (uma analogia), consideremos que a sequência (p_n) de polígonos na figura a seguir,



converge para o círculo σ, isto é, $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \sigma$.

Observe a analogia:

$$0,9\,;\ 0,99\,;\ 0,999\,;\ 0,9999\,;\ \ldots\,;\ \alpha_n\,;\ \cdots \to 1$$

onde, $\alpha_n = 0,999\ldots 9 = 1 - \frac{1}{10^n}$. Temos,

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 1$$

Escrever este resultado da seguinte forma,

$$\alpha_\infty = 0,999\ldots = 1$$

é apenas, e tão somente, uma notação. É como se para o limite,

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \sigma$$

escrevessemos,

$$p_\infty = \sigma$$

É tão ingênuo pretender que um *polígono de infinitos lados* seja igual a um círculo quanto pretender que uma decimal com infinitas casas, no caso $0,999\ldots$, seja um número ($= 1$). Deveras, são objetos de naturezas distintas.

Então, voltando à "prova" anterior, isto é, sobre a impossibilidade de se encontrar um número x tal que $0,999\ldots < x < 1$; é a mesma coisa que se pretender provar que um polígono de infinitos lados é um dado círculo, pela impossibilidade de se encontrar um outro círculo x entre ambos, assim:

$$p_\infty < x < \sigma$$

• Uma outra "prova" de que $0,999\ldots = 1$ é dada assim: faça $x = 0,999\ldots$, multiplique por 10: $10\,x = 9,999\ldots$, subtraia:

$$\begin{array}{r} 10\,x = 9,999\ldots \\ x = 0,999\ldots \\ \hline 10\,x - x = 9 \end{array} \quad \Rightarrow \; 9x = 9 \;\; \Rightarrow \;\; x = 1.$$

Esta prova está correta se o escopo foi provar que a série $0,999\ldots$ converge para 1. Está errada se foi provar que $0,999\ldots = 1$ (mesmo!)

− Ademais, encontramos também na internet o trabalho **0,999. . . É IGUAL A 1?** das professoras Estela Kaufman Fainguelernt e Lucia Maria Aversa Villela no qual lemos

Desenvolvimento

Inicialmente provocamos os participantes do grupo a responderem a questão "$0,999\ldots$ é igual a 1?", estimulando-os a que justificassem as suas conjecturas. A maioria dos alunos respondeu que não era igual.

Após exibir alguns métodos para justificar a igualdade em questão as autoras citam:

Consideramos ser relevante registrar pelo menos uma das justificativas surgidas na defesa da resposta negativa. Um dos alunos, em mais de um momento (mesmo depois de termos feito uma revisão de como transformávamos decimais em frações), afirmava que 0,999... era igual à fração $\frac{999999\ldots}{1000000\ldots}$ *e que portanto faltava alguma coisa para que o numerador fosse igual ao denominador. O "erro" na transformação do numeral decimal em fracionário seria conceitual ou seria tentativa de argumentação, mostrando a insatisfação diante da "falta" de algo? Conjecturamos que estes alunos estavam expressando, à sua maneira, a idéia dos infinitésimos.*

A conclusão a respeito deste trabalho é que nem as próprias autoras têm uma resposta para a questão − ficou em aberto.

− As várias provas (discussões, exegese) que encontramos na internet (e na literatura) para a igualdade $0,999\ldots = 1$, a mim é prova de que sempre existiu "no ar" uma como que insegurança (incompreensão) a respeito da mesma; nosso teorema 1 corrobora o ponto de vista dos que sempre afirmaram que esta não é uma igualdade legítima! (de fato, é uma igualdade espúria). Nossos argumentos, além de pôr fim a todas estas pendengas, foi um pouco mais longe ao provar que nenhuma representação decimal pode ser vista como um número; por exemplo − dentro deste contexto − lembramos que provamos que,

$$0,4999\ldots = 0; \;\; \text{e} \;\; 0,333\ldots = 0$$

Ou seja, tais "entidades" dependem da métrica (topologia) considerada, logo, não podem ser números!

− No início da presente década, eu já me encontrava insatisfeito com a construção da curva de Peano apresentada pelo Prof. Elon − em seu livro de Espaços Métricos, [2]; desconfiei de que o Prof. havia sido assaz perdulário em sua construção*. Algum tempo depois troquei alguns email's com um seu colega do Impa, em um dos email's que recebi, na data de 15.12.2004, consta:

*Nesta construção intervém as `representações`. Ver [8].

"[...] Vou tentar explicar a minha posição: Você pode dizer que a única representação decimal correta de $1/2$ é $0,5$. Entretanto, para isso, você deve dizer que $0,4999...$ não é a representação decimal de nenhum número. De fato, se $x = 0,49999...$, $10x = 4,99999...$, donde $9x = 10x - x = 4,5$, e logo $x = 4,5/9 = 0,5 = 1/2$. Ou ainda, se o número $x = 0,4999...$ não for igual a $0,5$, $0,5 - x$ será um número positivo infinitamente pequeno, e logo $1/(0,5 - x)$ será um número positivo maior que todos os naturais, e R não seria arquimediano".

• À luz de nossas considerações é fácil refutar o seguinte trecho:

"se o número $x = 0,4999...$ não for igual a $0,5$, $0,5 - x$ será um número positivo infinitamente pequeno, e logo $1/(0,5 - x)$ será um número positivo maior que todos os naturais, e R não seria arquimediano".

Se, como mostramos, $0,4999...$ não é um número tão pouco o será $0,5 - 0,4999...$; logo, a divisão $1/(0,5 - x)$ torna-se sem sentido, assim todo o argumento torna-se estéril, palrice!

Infinito atual × Infinito potencial

A nossa exegese (sobre as representações) poderia ainda levar em conta a controversa questão dos `infinitos potencial e atual`, não nos estenderemos mais, apenas a este respeito citaremos a referência [5], na qual lemos (pág. 18):

"O príncipe dos matemáticos, Carl Friedrich Gauss (1777 − 1855), expressando um sentimento compartilhado pela comunidade matemática de sua época, escreveu, por exemplo: "*Eu contesto o uso de um objeto infinito como um todo completo; em matemática, essa operação é proibida; o infinito é só um modo de dizer*".

Isto tem a ver com:

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = 1 \iff \alpha_\infty = 0,999\ldots = 1$$

$$\lim_{n \to \infty} p_n = \sigma \iff p_\infty = \sigma$$

Os infinitos, α_∞ e p_∞, "**são apenas modos de dizer**". Ou ainda:

$$\underbrace{0,999\ldots9}_{\texttt{infinito potencial}} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{0,999\ldots}_{\texttt{infinito atual}}$$

A passagem do *infinito potencial* para o *infinito atual* "é apenas um modo de dizer..."

5 O que é um número?

Penso que para respondermos à questão se $0,999\ldots$ é ou não igual ao número 1 devemos antes saber **o que é um número**. Parece mentira mas é raro um livro de matemática que tenta responder a essa questão − como é fácil o leitor constatar.

Depois de muito procurar a resposta para o que seja um número, encontrei o livro citado na referência [10] no qual lemos:

Números

Quanto é dois? Como, de modo geral, vamos definir números? Para preparar a resposta, consideremos um conjunto **X** e formemos a coleção **P** de todos os pares não-ordenados $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$, com **a** em **X**, **b** em **X**, e $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$. Parece claro que todos os conjuntos na coleção **P** têm uma propriedade comum, a saber a propriedade de consistirem de dois elementos. É atraente tentar definir "**duplicidade**" como a propriedade comum de todos os conjuntos na coleção **P**, mas deve-se resistir à tentação; pois uma tal definição, no final das contas, é um contra-senso matemático. O que é uma propriedade? Como sabemos que, em comum, só há uma propriedade para todos os conjuntos em **P**?

Refletindo mais poderíamos encontrar um modo de aproveitar a idéia por trás da definição proposta sem usar expressões vagas como "**a propriedade comum**". É uma prática matemática sempre presente identificar uma propriedade como um conjunto, ou seja com o conjunto de todos os objetos que possuem a propriedade; por que não adotá-la aqui? Em outras palavras, por que não definir "**dois**" como o conjunto **P**? Às vezes são feitas coisas deste gênero, mas não completamente satisfatórias. A dificuldade está em que agora esta nossa proposta modificada depende de **P**, e, em última instância, portanto, de **X**. Na melhor das hipóteses a proposta define duplicidade para subconjuntos de **X**; não dá nenhuma indicação de como ou quando podemos atribuir a propriedade de duplicidade a um conjunto que não está contido em **X**.

Há dois caminhos a seguir. Um caminho é abandonar a restrição a um particular conjunto, e considerar no lugar todos os possíveis pares não-ordenados $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ com $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$. Estes pares não-ordenados não constituem um conjunto; a fim de basear a definição de "**dois**" nestes pares, toda a teoria sob consideração deveria ser entendida para incluir os "**não-conjuntos**" **(classes)** de outra teoria. Isto pode ser feito, mas não será feito aqui; seguiremos uma rota diferente.

Como um matemático poderia definir um metro? O procedimento análogo a um dos esboçados acima envolveria os dois seguintes passos. Primeiro, selecione um objeto que é um dos possíveis modelos do conceito a ser definido − Em outras palavras, um objeto, tal que, em termos intuitivos ou práticos, merece ser chamado, se é que merece, de um metro. Segundo, forme o conjunto de todos os objetos no universo que são do mesmo comprimento do objeto previamente selecionado (note-se que este procedimento não depende do conhecimento do que é metro) e defina-se um metro como um conjunto assim formado.

Como de fato é definido um metro? O exemplo foi escolhido de modo que a resposta a esta questão pudesse sugerir um modo de se chegar a definição de números. A questão é que na definição costumeira de um metro a segunda parte é omitida. Por uma convenção mais ou menos arbitrária um objeto é selecionado e o seu comprimento é chamado um metro. Se a definição é acusada de circularidade (o que significa **"comprimento"?**)*, ela pode ser facilmente convertida em definição demonstrativa irrepreensível; não há apesar de tudo nada que nos impeça de definir um metro como igual ao objeto selecionado. Se esta abordagem demonstrativa é adotada, torna-se tão fácil explicar como antes quando a propriedade de **"ser um metro"** poderá ser, atribuída a algum outro ob-

*Exemplo de uma definição circular: ponto é o encontro de duas retas. Agora, a pergunta: o que é uma reta? É um conjunto de pontos. O que é um ponto? A resposta, nos conduzirá de volta ao início, fechando o círculo. **N.T.**

jeto, ou seja, precisamente no caso do novo objeto ter o mesmo comprimento do padrão selecionado. Observamos novamente que para saber se dois objetos têm o mesmo comprimento depende única e simplesmente do ato de comparação, e assim não depende de se ter uma precisa definição de comprimento.

Motivados pelas considerações expostas acima, definimos anteriormente **2** como um particular conjunto (intuitivamente falando) de exatamente dois elementos. Qual foi o conjunto padrão selecionado? Como seriam selecionados os outros conjuntos-padrão para os outros números? Não há nenhuma razão matemática obrigatória para preferirmos uma ou outra resposta a esta questão; a coisa é em grande parte uma questão de preferência. A seleção deveria ser guiada por considerações de simplicidade e economia.

Para justificar a particular seleção que foi feita, suponha que o número, digamos **7**, tenha já sido definido como um conjunto (com sete elementos). Como, neste caso, definiríamos **8**? Onde em outras palavras, podemos encontrar um conjunto consistindo exatamente de oito elementos? Podemos encontrar sete elementos no conjunto **7**; o que usaremos como oito para juntar a eles? Uma razoável resposta a esta última pergunta e o próprio número (conjunto) **7**; a proposta é definir **8** como o conjunto consistindo dos sete elementos do **7**, junto com o **7**. Note-se que de acordo com esta proposta cada número será igual ao conjunto dos seus próprios predecessores.

O parágrafo anterior motivou uma construção em termos de teoria dos conjuntos que faz sentido para todo conjunto, mas isto é somente de interesse na construção de números. Para todo conjunto $\mathbf{x}$ definimos o **SUCESSOR** $\mathbf{x}^+$ de $\mathbf{x}$ como o conjunto obtido pelo acréscimo $\mathbf{x}$ aos elementos de $\mathbf{x}$; em outras palavras:

$$\mathbf{x}^+ = \mathbf{x} \cup \{\mathbf{x}\}.$$

Estamos agora prontos para definir números naturais. Não há outra alternativa, define-se **0** como um conjunto com zero elementos; assim devemos escrever (como o fizemos):

$$\mathbf{0} = \emptyset$$

Se todo número natural deve ser igual ao conjunto de seus predecessores, não temos nenhuma outra escolha ao definirmos **1**, ou **2**, ou **3**; devemos escrever:

$$\mathbf{1} = \mathbf{0}^+ = (\{\mathbf{0}\}),$$

$$\mathbf{2} = \mathbf{1}^+ = (\{\mathbf{0},\, \mathbf{1}\}),$$

$$\mathbf{3} = \mathbf{2}^+ = (\{\mathbf{0},\, \mathbf{1},\, \mathbf{2}\}),$$

etc.

O leitor julgue por si mesmo se a (enfadonha) definição anterior de número é razoável. A este respeito, penso que posso fazer melhor. Desde já deixo claro que tudo o que se segue é a minha maneira pessoal de tratar essa questão, ela tem me rendido bons dividendos.

Conjuntos × Estruturas

> "No início era o caos . . . e Deus disse: 'Que exista a luz!' E a luz começou a existir." `(Gn 2:3)`

Para, posteriormente, darmos uma definição de número precisamos antes fazer distinção entre *conjunto* e *estrutura*.

Em matemática são freqüentes conjuntos munidos de uma ou mais operações, que gozam de certas propriedades. Esses conjuntos com tais operações e respectivas propriedades constituem aquilo que denominamos estruturas algébricas.

Para nos auxiliar em nosso objetivo (deixar claro a diferença entre conjunto e estrutura) vamos recorrer a uma analogia: Suponhamos um conjunto M cujos elementos são materiais de construção, assim:

$$M = \{\text{tijolo, cimento, telha, pedra, areia, } \ldots\}$$

"sobre" este conjunto podemos construir diversas estruturas, por exemplo:

$$M \;\begin{cases} \longrightarrow \text{ - Edifício} \\ \longrightarrow \text{ - Casa} \\ \longrightarrow \text{ - Ponte} \end{cases}$$

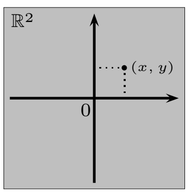
Não devemos confundir o conjunto M com a "estrutura" edifício, por exemplo.

Mas este tipo de confusão é o que comumente se faz quando se fala de conjuntos numéricos. No nosso entendimento um "conjunto numérico" não é um conjunto, mas sim uma *estrutura*. Há tanta imprecisão em considerar um "conjunto" numérico como um conjunto, quanto confundir − por exemplo − o edifício com o conjunto M.

− Com um jogo de xadrez também podemos jogar damas. Em outras palavras, com o conjunto das peças de um xadrez podemos construir duas estruturas: dama e xadrez.

− O mesmo acontece com respeito ao conjunto das cartas de um baralho, com o qual podemos ter diversos jogos (estruturas).

Entendemos que com respeito aos entes (conceitos) matemáticos não deve ser diferente. Por exemplo, sobre o mesmo conjunto $\mathbb{R}^2 = \big\{(x,\, y) \colon x,\, y \in \mathbb{R}\big\}$ (conjunto de pontos do plano) podemos construir diversas estruturas, por exemplo:



- Espaço vetorial: $\begin{cases} (a,\, b) + (c,\, d) = (a+c,\, b+d) \\ \lambda(a,\, b) = (\lambda a,\, \lambda b) \end{cases}$

- Números $\mathbb{C}$: $\begin{cases} (a,\, b) + (c,\, d) = (a+c,\, b+d) \\ (a,\, b)\cdot(c,\, d) = (ac-bd,\, ad+bc) \end{cases}$

- ANEL: $\begin{cases} (a,\, b) + (c,\, d) = (a+c,\, b+d) \\ (a,\, b)\cdot(c,\, d) = (ac,\, bd) \end{cases}$

Nota: Não é necessário que o leitor tenha conhecimento das estruturas acima, basta que entenda que manipulando os pontos do plano com regras distintas obtemos estruturas distintas ("jogos distintos").

Assim o número de estruturas que podemos construir sobre um mesmo conjunto estará limitado apenas por nossa criatividade.

Nota: Em [9] construimos uma nova estrutura numérica sobre o $\mathbb{R}^2$, a qual consiste em um nova generalização dos números reais.

− Por oportuno, observamos que assim como podemos construir diversas estruturas sobre um mesmo conjunto, a recíproca também vale: um mesmo sistema (números naturais, por exemplo − ver [6]) pode ser construido sobre vários conjuntos.

Pois bem, do nosso ponto de vista, os *"conjuntos" numéricos* são estruturas construidas sobre conjuntos.

Em alguns livros-texto ao invés de conjunto dos números reais, por exemplo, diz-se sistema dos números reais, designação esta mais apropriada − a nosso ver −, uma vez que nos permite uma distinção entre conjunto e estrutura.

Estabelecemos agora algumas definições:

Definição 2 (Operação)**.** *Sendo E um conjunto não vazio, toda aplicação $f\colon E \times E \rightarrow E$ recebe o nome de operação sobre E.*

Para construirmos um sistema numérico sobre um dado conjunto basta definirmos duas operações sobre este conjunto, uma das quais será chamada de **adição** e a outra de **multiplicação**, simbolizadas por $+$ e $\cdot$, respectivamente. Mais formalmente,

Definição 3 (Sistema numérico)**.** *Dado um conjunto* **E** *não vazio e duas operações sobre* **E***,*

$$+ : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E} \qquad\qquad \cdot : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$$
$$(x,\,y) \mapsto x+y \qquad\qquad (x,\,y) \mapsto x\cdot y$$

A terna $(\mathbf{E},\,+,\,\cdot)$ é o que entendemos por um sistema numérico (ou estrutura numérica). Usaremos da seguinte notação $(\mathbf{E},\,+,\,\cdot) = \mathbb{E}$.

Definição 4 (Número)**.** *Um "elemento" de um conjunto continuará a ser chamado de elemento; agora, ao construirmos uma estrutura algébrica sobre este conjunto, este elemento terá adquirido o status de* **número***. Por exemplo, 1 é um* **elemento** *do conjunto dos naturais $\mathbf{N} = \{1,\,2,\,3,\ldots\}$ enquanto que 1 é um* **número** *da estrutura $\mathbb{N} = \big(\mathbf{N},\,+,\,\cdot\big)$.*

Continuaremos a usar o símbolo de pertinência ($\in$) tanto de elemento para conjunto quanto de número para estrutura. Por exemplo,

$$1 \in \mathbf{N}, \quad 1 \in \mathbb{N}$$

No primeiro caso 1 é um **reles elemento** do conjunto dos naturais; enquanto no segundo caso, 1 terá adquirido o status de **número** do sistema numérico dos naturais.

Com o objetivo de exemplificar o que foi visto anteriormente vejamos um exemplo singelo. Consideremos o conjunto de dois símbolos a seguir:

$$\mathbf{Z}_2 = \{\,0,\,1\,\}$$

Até o momento os símbolos 0 e 1 são meros elementos do conjunto $\mathbf{Z}_2$. Para conferir a estes reles elementos o status de números vamos definir duas operações, dadas pelas tábuas a seguir:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Agora temos um sistema numérico: $\mathbb{Z}_2 = \big(\mathbf{Z}_2, +, \cdot\big)$ e os símbolos 0 e 1 adquiriram status de números.

Apenas por curiosidade, o sistema $\mathbb{Z}_2$, não obstante a soma esdrúxula $1+1=0$, possui aplicações na matemática superior, bem como na informática. É conhecido como *inteiros módulo* 2.

"[...] A isto se acrescenta que todo símbolo é ambivalente e até mesmo polivalente, no sentido de que ele pode significar uma pluralidade de realidades diversas e mesmo contraditórias."
(Léon Bonaventure)

"Aceder à evolução é rejuvenescer espiritualmente, é aceitar uma brusca mutação que contradiz o passado."
(Paráfrase/Bachelard)

A definição de número dada anteriormente é geral, agora para sistemas específicos devemos adicionar condições (propriedades) extras. Por exemplo, o que é um número natural? Antes de responder a esta pergunta vejamos

Como comer um Xadrez, com peça e tudo, e no final sair assobiando...

Ainda com o escôpo de diferenciar conjunto de estrutura vejamos mais uma analogia.

Posso *provar* a vocês que sou capaz de comer (literalmente falando) um xadrez, "com peça e tudo", e no final ainda saio assobiando.

Com efeito, inicialmente mando construir um tabuleiro com chocolate branco e preto, as peças posso substituir por cereais, tipo assim:

peão	$\Leftrightarrow$	um grão de arroz
torre	$\Leftrightarrow$	um grão de feijão
cavalo	$\Leftrightarrow$	um grão de milho
......	...	....
rainha	$\Leftrightarrow$	uma sobremesa.

Pois bem, nada me impede de jogar xadrez com este tabuleiro (com a mesma legitimidade do "xadrez canônico") e, no final, refestelar-me sem nenhum desconforto; para provar isto, no final ainda saio assobiando.

Moral da história

O jogo de xadrez não é constituido, ao contrário do que estamos condicionados a imaginar, pelo tabuleiro e as peças, mas sim **por suas regras**.

Na metáfora do xadrez, temos

$$\text{Xadrez} = (\,\{\,\text{peças}\,\},\ \text{regras}\,)$$

o xadrez é um "sistema numérico" (jogo), todavia, as peças podem ser as mais diversas possíveis, isto não vai nos impedir de jogar. Enfatizo: no par ordenado acima, as peças podem mudar, o que não pode mudar são as regras (caso contrário deixa de ser xadrez).

De igual modo, podemos ver um sistema numérico como um conjunto de símbolos munido de algumas regras para manipulações destes símbolos − operações e mais propriedades.

− Um outro símile: Podemos ver um sistema numérico como um sistema de processamento de informações: composto de `hardware` e `software`. Por exemplo, os *números inteiros*, podem ser vistos assim:

$$\mathbb{Z} = (\,\underset{\substack{\uparrow\\ \texttt{Conjunto}\\ \texttt{(hardware)}}}{\mathbf{Z}},\, \nu\,) \;\hookrightarrow \texttt{Software(instruções)}$$

O hardware canônico para os inteiros é o conjunto de símbolos:

$$\mathbf{Z} = \{\, \ldots, -1,\; -2,\; -3,\; 0,\; 1,\; 2,\; 3, \ldots \,\}$$

O software ν é constituido por todas as *instruções* que caracterizam os inteiros. Algumas destas instruções (propriedades) são comuns aos *números naturais* e serão listadas a seguir.

De modo similar, os *números naturais* podem ser vistos assim:

$$\mathbb{N} = (\,\underset{\substack{\uparrow\\ \texttt{Conjunto}\\ \texttt{(hardware)}}}{\mathbf{N}},\, \sigma\,) \;\hookrightarrow \texttt{Software(instruções)}$$

No caso dos $\mathbb{N}$aturais o hardware (canônico) é dado por $\mathbf{N} = \{\, 0,\; 1,\; 2,\; 3, \ldots \}$; o software σ é dado pelo seguinte conjunto de instruções:

Axiomas algébricos

A.1 (*A adição é associativa*) Quaisquer que sejam $a,\, b,\, c \in \mathbf{N}$ tem-se que
$a + (b + c) = (a + b) + c$

A.2 (*A adição é comutativa*) Quaisquer que sejam $a,\, b \in \mathbf{N}$ tem-se que
$a + b = b + a$

A.3 (*Existe um elemento neutro para a adição*) Existe $\theta \in \mathbf{N}$ tal que $\theta + x = x$, para todo $x \in \mathbf{N}$.

M.1 (*A multiplicação é associativa*) Quaisquer que sejam $a,\, b,\, c \in \mathbf{N}$ tem-se que
$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

M.2 (*A multiplicação é comutativa*) Quaisquer que sejam $a,\, b \in \mathbf{N}$ tem-se que
$a \cdot b = b \cdot a$

M.3 (*Existe um elemento neutro para a multiplicação*) Existe $\lambda \in \mathbf{N}$, com $\lambda \neq \theta$ tal que $\lambda \cdot x = x$, para todo $x \in \mathbf{N}$.

AM (*A multiplicação é distributiva em relação à adição*) Quaisquer que sejam $a,\, b,\, c \in \mathbf{N}$ tem-se que
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$

As exigências listadas acima ainda não são suficientes para caracterizar os naturais.

Axiomas de ordem

Deve existir, em $\mathbb{N}$, uma relação binária $m \leq n$, que se lê m é menor do que ou igual a n, que goza das seguintes propriedades:

O_1 (*Reflexividade*) Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $n \leq n$.

O_2 (*Antisimetria*) Para todo $m,\, n \in \mathbb{N}$, se $m \leq n$ e $n \leq m$ então $m = n$.

O_3 (*Transitividade*) Para todo $m,\, n,\, p \in \mathbb{N}$, se $m \leq n$ e $n \leq p$ então $m \leq p$.

Por causa dos axiomas O_1, O_2 e O_3 diz-se que a relação $\leq$ é uma relação de ordem.

Usaremos o símbolo $m < n$ para indicar que $m \leq n$, mas $m \neq n$; neste caso diremos que m *é menor que* n.

O_4 (*Tricotomia*) Dados $m,\, n \in \mathbb{N}$ quaisquer tem-se que ou $m < n$ ou $m = n$ ou $n < m$.

OA (*Compatibilidade com a adição*) Para todo $m,\, n,\, p \in \mathbb{N}$, se $m \leq n$ então $m + p \leq n + p$.

OM (*Compatibilidade com a multiplicação*) Para todo $m,\, n,\, p \in \mathbb{N}$, se $m \leq n$ e $0 \leq p$ então $m \cdot p \leq n \cdot p$.

Axioma da Boa Ordem

Resta um último axioma para a caracterização completa dos números naturais. Para tanto necessitaremos de uma,

Definição 5 (Menor elemento)**.** *Seja* $\mathbf{A}$ *um subconjunto de* $\mathbf{N}$. *Diremos que* $m \in \mathbf{N}$ *é o menor elemento de* $\mathbf{A}$, *se:*

(i) $m \in \mathbf{A}$;

(ii) $m \leq n$, *para todo* n *em* $\mathbf{A}$.

Axioma da Boa Ordem: Todo subconjunto não vazio de $\mathbf{N}$ tem um menor elemento.

Nota: Observamos que o software σ do naturais pode rodar (pode ser implementado) em outros hardwares além de $\mathbf{N} = \{\, 0,\, 1,\, 2,\, 3, \ldots \}$; o mesmo vale para os inteiros, como de resto para os demais números. Por exemplo, em [6] rodamos os naturais e os inteiros em um outro hardware.

Apenas para contextualizar, observe que os números $\mathbb{C}$omplexos, como aparecem na literatura, rodam em dois hardwares distintos*; quais sejam: no conjunto de pares ordenados $(a,\, b)$ de números reais e também no conjunto de símbolos da forma $a + b\,i$, com a e b reais.

• Feito estes esclarecimentos, digo dentro deste novo contexto, fica fácil entender por que razão as expressões decimais não são números. Por exemplo, a expressão (símbolo) $0,\, 999\ldots$ pertence a um outro conjunto, o das *representações decimais*; para efeitos didáticos, colocamos

$$\Re = \{\, 0,\, 999\ldots; 0,\, 4999\ldots;\, 0,\, 5000\ldots;\, \ldots\} \tag{12}$$

Não consideramos os **elementos** deste conjunto números, para tanto teríamos que definir, para expressões decimais, duas operações, uma chamada adição e outra multiplicação, estas operações devem satisfazer − se quiserem conceder a $\Re$ o status de números reais − todas as propriedades requeridas para estes

*Conjuntos de símbolos distintos.

números (em resumo as de "corpo ordenado completo"). Desconheço a **estrutura** $(\Re, +, \cdot)$.

Adendo: Vejo uma grande diferença entre, por exemplo, os símbolos: 1 e $0,999\ldots$. De fato, quando seguimos as construções numéricas,

$$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \tag{13}$$

encontramos o símbolo 1 nos naturais, já o símbolo $0,999\ldots$ não é encontrado em nenhuma destas construções. E isto faz uma grande diferença.

Já dissemos que um número é um ente abstrato e que, por isto mesmo, habita o "mundo das idéias" (como diria Platão), no entanto − tal como os Espíritos − podem tomar corpo e habitar em nosso plano; isto acontece precisamente através das construções numéricas tais como o método dos cortes de Dedekind ou das sequências de Cauchy (devido a Cantor), que são os dois métodos mais conhecidos para encarnar os *números reais*.

* * *

"E, conquanto as ideias e o pensamento matemáticos estejam em constante evolução [...] a maioria dos problemas básicos fundamentais nunca desaparece."

"Eu deveria logo dizer que discordo completamente daqueles que afirmam que o campo da matemática incorpora eternamente uma perfeição estática, e que as ideias matemáticas não são humanas, nem mutáveis. Ao contrário, esses estudos de caso, essas histórias intelectuais ilustram o fato de que a matemática está constantemente em evolução e mudança, e que nossa perspectiva, mesmo nas questões de matemática básica e mais aprofundada, se desloca, amiúde, de maneira surpreendente e inesperada. Tudo o que ela necessita é de uma nova ideia! Você precisa apenas estar inspirado e depois trabalhar feito louco para desenvolver sua nova concepção. De início, as pessoas irão combatê-lo, mas, se você estiver certo, então todos dirão, no fim de contas, que **obviamente** *era o modo de encarar o problema, e que sua contribuição foi pequena ou nula! De certa maneira, este é o maior dos cumprimentos."*

(Gregory Chaitin/Metamat!/pág. 30-Grifo nosso)

Apêndice 1 (19.12.2008)

Enviei, no dia 20.10.2008, à `Revista Matemática Universitária`, uma versão compacta (13 p.) e "politicamente correta" deste trabalho, sob o título "Se $1 \neq 0$ então $0,999\ldots$ não é um número", para possível publicação. Algum tempo depois recebi o seguinte email

Gentil Lopes <gentil.silva@gmail.com>

Matemática Universitária

1 mensagem

Eduardo Colli <colli@ime.usp.br> **5 de dezembro de 2008 12:23**
Para: gentil.silva@gmail.com

> Prezado Gentil,
>
> mais uma vez agradecemos o interesse em publicar na Matemática Universitária.
>
> Em razão da firme convicção do Corpo Editorial de que $0,999\ldots$ é igual a 1 no corpo dos reais, e de que 0 é igual 1 no quociente de R por Z mas não no corpo dos reais, lamentamos comunicar-lhe que seu artigo "Se $1 <> 0$ então $0.999\ldots$ não é um número" não será publicado na revista.
>
> Quanto ao seu outro artigo, "Traçados $3-D$. Um auxílio para o traçado de figuras no LaTeX", os editores o examinaram e julgaram que não se enqua dra no perfil da revista.
>
> Atenciosamente,
>
> Eduardo Colli
> Editor-chefe da Matemática Universitária

Confesso que, ao receber este email, me senti um tanto quanto feliz e até sorri.

Como assim? não estás sendo hipócrita?

Minha consciência me diz que não. De fato, de imediato vislumbrei que a incompreensão (ignorância) dos editores viria a valorizar ainda mais nossas aquisições; com efeito, como se vê, estamos lidando com questões "filosóficas" sutis* e não tenho como não exultar em ser o primeiro terráqueo a enxergar − não com os olhos físicos mas com os da lógica − tais sutilezas.

Ouçamos, novamente, o que os mais velhos têm a nos dizer:

"Tudo isso, que à primeira vista parece excesso de irrazão, na verdade é o efeito da finura e da extensão do espírito humano e o método para encontrar verdades até então desconhecidas." **Voltaire**

*Digo, sutis para os editores − que "tropeçaram ao meio dia como se fosse no crepúsculo" −, para mim são questões triviais.

Acreditamos – e vamos provar – que o "Corpo Editorial" **não compreendeu** o nosso Artigo. Este equívoco, pelo ao menos a mim, prova mais uma vez que os matemáticos não possuem uma clareza suficiente do que seja um número.

Primeiro ponto: a ênfase do meu artigo, desde a capa, não é contra a igualdade $0,999\ldots = 1$, mas sim contra a sua interpretação literal, qual seja: a de que o "número" $0,999\ldots$ seja igual ao número 1. Temos sempre dito que esta igualdade é insuficiente para conferir o status de número à representação decimal $0,999\ldots$; como o meu artigo foi rejeitado devo assumir que os editores não estão de acordo com minha tese principal; ou ainda: que êles, tal como o prof. Elon, acreditam que $0,999\ldots = 1$ mesmo!

Pois bem, o Corpo Editorial alega que tem "convicção" de que $0,999\ldots = 1$ no corpo dos reais.

É muito fácil refutar-lhe se nos dermos conta de que o estabelecimento da igualdade $0,999\ldots = 1$ não depende das propriedades de corpo dos números reais.[†]

Vamos seguir o itinerário do Prof. Elon em [4] para estabelecer a referida igualdade e mostrar que todos os passos podem ser aplicados ao nosso Universo $[\,0,\,1\,[$. Na pág. 59 (de [4]) o autor escreve:

Uma *expressão decimal* é um símbolo da forma

$$\alpha = a_0,\, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots ,$$

onde a_0 é um número inteiro ≥ 0 e $a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$, são dígitos, isto é, números inteiros tais que $0 \leq a_n \leq 9$.

• Vemos que aqui temos uma definição do que seja uma *expressão decimal*. É importante observar que para esta definição não precisamos das propriedades de corpo dos números reais; tanto é que podemos adotá-la em nosso Universo; apenas que, em nosso contexto, fica:

Uma *expressão decimal* é um símbolo da forma

$$\alpha = 0,\, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots , \tag{14}$$

onde $a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$, são dígitos, isto é, números inteiros tais que $0 \leq a_n \leq 9$.

Observe que os nossos símbolos, dados em (14), são os mesmos dos reais[*] não há nenhuma razão para que sejam diferentes.

Mais à frente, ainda na mesma página, o autor escreve:

Mais de que forma uma sequência de dígitos, precedida de um número inteiro, representa um número real? A resposta é: a expressão decimal α, dada acima, representa o número real

$$(*) \qquad \bar{\alpha} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots .$$

Na realidade, é meio pedante usar uma notação diferente, $\bar{\alpha}$, para indicar o número real cuja expressão decimal é α. Na prática, não se faz isso. Vamos então seguir o costume e usar a mesma notação α, para o número e sua expressão decimal.

• Aqui temos a definição de um outro símbolo; dizer que $\bar{\alpha}$ representa um

[†] Digo, pelo ao menos ao ponto de invalidar meus argumentos.
[*] Dados na definição do prof. Elon.

número real, no momento é apenas um abuso de linguagem por parte do prof. uma vez que como êle mesmo admite um pouco mais à frente "*Mais importante é explicar o significado daquelas reticências no final da igualdade. Elas dão a entender de que se trata de uma soma com infinitas parcelas, mas isto é uma coisa que não tem sentido, pelo ao menos em princípio.*" (grifo nosso)

Pois bem, $\bar{\alpha}$ é a definição de um outro símbolo associado a α. Mais uma vez observamos que, para esta definição, não precisamos das propriedades de corpo dos reais, tanto é que podemos adotá-la em nosso Universo; então, ao símbolo (14) associamos um outro, da seguinte forma:

$$\bar{\alpha} = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots . \tag{15}$$

Observe que podemos definir este símbolo em nosso Universo mesmo que não contemos com uma adição no mesmo; como bem pontuou o prof. Elon, de momento este símbolo não tem sentido, nem nos reais e nem em nosso Universo.

Ainda observamos que os símbolos são os mesmos tanto nos reais quanto em $[\,0,\,1\,[$, não há nenhuma razão para serem diferentes.

Agora o prof. vai atribuir um significado ao símbolo $\bar{\alpha}$ que comparece em $(*)$, que é o significado que todos conhecemos: associa-se a este símbolo uma sequência (de somas parciais, ou reduzidas);

$$\begin{aligned}
S_0 &= a_0\\
S_1 &= a_0 + \frac{a_1}{10}\\
S_2 &= a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2}\\
&-----------------\\
S_n &= a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}
\end{aligned}$$

dizemos que o limite desta sequência, quando existir, é a soma da "série" dada em $(*)$.

Precisamos atribuir um significado ao nosso símbolo $\bar{\alpha}$ que comparece em (15), para tanto, tal como nos reais, associemos a este a seguinte sequência:

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{a_1}{10}\\
s_2 &= \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2}\\
&---------------\\
s_n &= \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}
\end{aligned}$$

onde, agora, a adição que comparece acima é a mesma dos reais. Uma questão que temos que resolver de imediato é se estas expressões fazem sentido em nosso universo $[\,0,\,1\,[$. Ou ainda: a sequência $(\,s_n\,)$ de somas parciais de fato é uma sequência em $[\,0,\,1\,[$? A situação mais "crítica" que pode ocorrer é quando

$$s_n = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \cdots + \frac{9}{10^n}$$

e, neste caso,

$$\begin{aligned}
s_n = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \cdots + \frac{9}{10^n} &= 9 \cdot \Big(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots + \frac{1}{10^n}\Big)\\
&= 9 \cdot \frac{\frac{1}{10}\big(\frac{1}{10^n} - 1\big)}{\frac{1}{10} - 1} = 1 - \frac{1}{10^n} < 1
\end{aligned}$$

Portanto, nosso desiderato foi atendido! Até aqui a definição (e significado) de nossos símbolos (expressões decimais e séries) é a mesma que nos reais, em particular o símbolo $0,999\ldots$ é o mesmo nos dois sistemas e, lembramos, trata-se de uma definição que não depende das propriedades de corpo dos reais.*

Agora, considerando a topologia (métrica) dos respectivos conjuntos, obtemos:

$$0,999\ldots = 1, \quad \text{em} \quad (\mathbb{R},\, \mu)$$

$$0,999\ldots = 0, \quad \text{em} \quad ([\,0,\, 1\,[,\, \Bbbk)$$

Conclusão: o mesmo símbolo assume valores distintos a depender da topologia considerada; logo, não pode ser um número.

Vamos resumir (compactar) nossos argumentos:

1º) Definimos expressões decimais, assim:

$$\alpha = 0,\, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots ,$$

onde $a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$, são dígitos, isto é, números inteiros tais que $0 \leq a_n \leq 9$.

Esta é apenas um caso especial de $\alpha = a_0,\, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$, com $a_0 = 0$. Pois bem, para uma tal definição não precisamos das propriedades de corpo dos números reais.

2º) Em seguida associamos ao símbolo anterior um outro símbolo,

$$\bar{\alpha} = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots . \tag{16}$$

que é um caso especial de $(\,*\,)$. Novamente, para uma tal definição não precisamos das propriedades de corpo dos números reais; a bem da verdade podemos considerar estes símbolos mesmo que não existissem os números reais, uma vez que em suas definições entram apenas (alguns) inteiros positivos.

3º) Agora precisamos atribuir um sentido ao símbolo (16), para tanto devemos considerar a sequência,

$$s_n = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$$

Para obter s_n consideramos a adição de $\mathbb{R}$ restrita a $[\,0,\, 1\,[$; isto é possível mesmo não sendo $\big([\,0,\, 1\,[,\, \times,\, +\big)$ um corpo; digo, isto não é necessário. Deste modo o significado dado a (16) é: $\bar{\alpha} = \lim s_n$.

Reitero: os símbolos e seus significados não dependem da estrutura de corpo dos reais, tanto é que são perfeitamente válidos no intervalo $[\,0,\, 1\,[$ (desde que este conte com uma métrica). Sendo assim, temos:

$$0,999\ldots \;\begin{array}{l} \xrightarrow{\;\mu\;} 0,999\ldots = 1 \\[2ex] \xrightarrow{\;\Bbbk\;} 0,999\ldots = 0 \end{array}$$

Conclusão: A igualdade $0,999\ldots = ?$ vai depender apenas da topologia que se considere.

Não entendo por que razão o símbolo $0,999\ldots$ deve adquirir o status de número real − como crêem todos matemáticos e, em particular, os editores da Matemática Universitária.

Uma consideração final: Acredito que os editores precipitaram-se ao ignorar o teorema 1 (pág. 15), deixo aqui aos matemáticos o desafio de me mostrarem onde encontra-se uma falha (lógica) no mesmo.

*Entenda-se bem: não depende ao ponto de nos impedir de adotar (e interpretar) estas definições em nosso universo $[\,0,\, 1\,[$, tanto é que o fizemos.

Adendo: Ocorreu-me mais um argumento contra a "igualdade mesmo!" entre representações e números reais.

Vamos partir do ponto em que o prof. Elon define representações decimais (pág. 32). Pergunto: como definir igualdade entre representações?

$$a_0,\, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots \stackrel{?}{=} b_0,\, b_1 b_2 \cdots b_n \cdots$$

Para definir esta igualdade vou me inspirar (copiar) a definição de igualdade entre sequências (na verdade uma representação é uma sequência), qual seja:

$$a_1 a_2 \cdots a_n \cdots = b_1 b_2 \cdots b_n \cdots \iff a_i = b_i, \ \ \forall\, i \in \mathbb{N}$$

De igual modo, entre duas representações deve dá-se:

$$a_0,\, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots = b_0,\, b_1 b_2 \cdots b_n \cdots \iff a_i = b_i, \ \ \forall\, i \in \mathbb{N} \cup \{\,0\,\} \tag{17}$$

Acho esta definição bastante razoável e, se algum matemático se opõe à mesma, gostaria que me argumentasse suas razões. Pois bem, vamos considerar as duas representações seguintes:

$$1,\, 0\,0\,0 \cdots$$
$$0,\, 9\,9\,9 \cdots$$

Seguindo o desenvolvimento das idéias, temos (ver ($\ast$), pág. 32):

$$1,\, 0\,0\,0 \cdots = 1 + \frac{0}{10} + \frac{0}{10^2} + \frac{0}{10^3} + \cdots = 1 \tag{18}$$

Também,

$$0,\, 9\,9\,9 \cdots = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots = 1 \tag{19}$$

Ora, se,

$$1,\, 0\,0\,0 \cdots = 1 \quad \text{(mesmo!)} \tag{20}$$

e,

$$0,\, 9\,9\,9 \cdots = 1 \quad \text{(mesmo!)} \tag{21}$$

e, usando o axioma de que duas quantidades iguais a uma terceira são iguais entre si, obtemos,

$$1,\, 0\,0\,0 \cdots = 0,\, 9\,9\,9 \cdots \quad \text{(mesmo!)}$$

Tendo em conta nossa definição em (17) concluimos que,

$$1 = 0 \quad \text{e} \quad 0 = 9 \quad \text{(mesmo!)}$$

Conclusão: Os matemáticos diriam que fui insensato em estabelecer a definição (17).

Da minha perspectiva; digo, para tentar me livrar da pecha de insensato, vejo as coisas da seguinte forma: primeiro, mantenho a definição (17), não vejo nenhuma estultície nesta definição. Depois interpreto as (segundas) igualdades em (18) e (19) como a convergência de duas séries para um mesmo limite.

Do exposto não posso concluir (como o fazem os matemáticos) que as igualdades (20) e (21) são absolutas! digo, que $0,\, 9\,9\,9 \cdots$ e 1 representam o mesmo número!

Não, não trata-se disto senhores matemáticos, por favor parem um pouco prá raciocinar!

Reitero: podemos adotar a definição (17), entre representações, sem nenhum sentimento de culpa, daí que $0,\,999\cdots$ e $1,\,000\cdots$ são duas representações distintas, bem como as respectivas séries em (18) e (19); agora o que estas séries têm em comum é o mesmo limite: 1.

Daqui, seria tolice de minha parte confundir uma série com seu limite e concluir que $0,\,999\cdots = 1$, mesmo!

Por vezes, tenho o sentimento de que minha principal missão sobre a terra tenha sido esta: revelar aos matemáticos o que seja um número. Não imagine o leitor que esta foi uma das missões mais simples que alguém já recebeu. Veja-se por exemplo o casos dos "Editores" da RMU, não entenderam ... "Tropeçaram ao meio dia, como se fosse no crepúsculo"!

Ainda observe − para clarear a exposição − que, no presente contexto, podemos invocar o conceito de *igualdades espúrias*, com o qual abrimos nosso trabalho. Por exemplo, a primeira igualdade em (18) é uma de tais igualdades; digo, não é uma igualdade absoluta, deve ser interpretada dentro de um contexto apropriado. Não é absoluta porque trata-se de dois símbolos distintos. Podemos justificar (interpretar) esta igualdade se considerarmos uma bijeção (`identificação`) entre dois conjuntos: o das representações decimais e o das séries, assim:

$$a_0,\, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots \quad \leftrightarrow \quad a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots .$$

Conclusão: Vou prosseguir pela vida afora* discordando dos matemáticos de que $0,999\ldots = 1$ (mesmo!) e, cônscio de que minha única "insensatez" (no presente contexto) foi ter adotado a definição (17).

Apêndice 2

Vamos provar que $\big([0,\,1[,\,\Bbbk\big)$ é um espaço métrico.

Teorema 2 (`Métrica Divina/Gentil/23.05.08`). *A aplicação,*

$$\Bbbk\colon [0,\,1[\times[0,\,1[\longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$\Bbbk(x,\,y) = \min\big\{|x-y|,\; 1-|x-y|\big\}$$

é uma métrica sobre $M = [0,\,1[$.

Prova: (M_1) $\Bbbk(x,\,y) \geq 0$ e $\Bbbk(x,\,y) = 0 \iff x = y$;

Temos

$$\begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ 0 \leq y < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ -1 < -y \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \;\; -1 < x-y < 1 \Rightarrow \;\; |x-y| < 1.$$

Sendo assim mostramos que $\Bbbk(x,\,y) \geq 0$.

Agora suponhamos,

$$\Bbbk(x,\,y) = \min\big\{|x-y|,\; 1-|x-y|\big\} = 0$$

Já vimos que $|x-y| < 1$, isto é, $1-|x-y| > 0$. Então se $\Bbbk(x,\,y) = 0$ só pode ser porque $|x-y| = 0$, isto é, $x = y$.

Reciprocamente, se $x = y$, resulta,

$$\Bbbk(x,\,y) = \min\big\{|x-y|,\; 1-|x-y|\big\} = \min\big\{|0|,\; 1-|0|\big\} = 0.$$

*Digo, até ser convocado para "outro plano".

(M_2) $\Bbbk(x,\, y) = \Bbbk(y,\, x)\,;$

Temos

$$\Bbbk(x,\, y) = \min\big\{|x-y|,\, 1-|x-y|\big\} = \min\big\{|y-x|,\, 1-|y-x|\big\} = \Bbbk(y,\, x).$$

(M_3) $\Bbbk(x,\, y) \leq \Bbbk(x, z) + \Bbbk(z, y).$

Devemos mostrar que $\Bbbk(x,\, y) \leq \Bbbk(x, z) + \Bbbk(z, y)$. Isto é,

$$\min\big\{|x-y|,\, 1-|x-y|\big\} \leq \min\big\{|x-z|,\, 1-|x-z|\big\} + \min\big\{|z-y|,\, 1-|z-y|\big\} \quad (22)$$

Vamos separar o nosso problema em oito possibilidades, conforme tabela a seguir,

$\Bbbk(x,\, y)$	$\Bbbk(x,z)$	$\Bbbk(z,y)$	
$\lvert x-y\rvert$	$\lvert x-z\rvert$	$\lvert z-y\rvert$	**(P1)**
$1-\lvert x-y\rvert$	$\lvert x-z\rvert$	$\lvert z-y\rvert$	**(P2)**
$\lvert x-y\rvert$	$1-\lvert x-z\rvert$	$\lvert z-y\rvert$	**(P3)**
$1-\lvert x-y\rvert$	$1-\lvert x-z\rvert$	$\lvert z-y\rvert$	**(P4)**
$\lvert x-y\rvert$	$\lvert x-z\rvert$	$1-\lvert z-y\rvert$	**(P5)**
$1-\lvert x-y\rvert$	$\lvert x-z\rvert$	$1-\lvert z-y\rvert$	**(P6)**
$\lvert x-y\rvert$	$1-\lvert x-z\rvert$	$1-\lvert z-y\rvert$	**(P7)**
$1-\lvert x-y\rvert$	$1-\lvert x-z\rvert$	$1-\lvert z-y\rvert$	**(P8)**

Temos:

$|x-y| \leq 1-|x-y| \Leftrightarrow |x-y| \leq \frac{1}{2}$

$1-|x-y| \leq |x-y| \Leftrightarrow |x-y| \geq \frac{1}{2}$

$|x-z| \leq 1-|x-z| \Leftrightarrow |x-z| \leq \frac{1}{2}$

$1-|x-z| \leq |x-z| \Leftrightarrow |x-z| \geq \frac{1}{2}$

$|z-y| \leq 1-|z-y| \Leftrightarrow |z-y| \leq \frac{1}{2}$

$1-|z-y| \leq |z-y| \Leftrightarrow |z-y| \geq \frac{1}{2}$

Então:

(**P1**) Neste caso a desigualdade (22) reduz-se a

$$|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$$

a qual é trivialmente satisfeita por tratar-se da desigualdade triangular para números reais.

(**P2**) Neste caso a desigualdade (22) reduz-se a

$$1-|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$$

Vamos mostrar a desigualdade equivalente

$$|x-y| + |x-z| + |z-y| \geq 1 \quad (23)$$

Observe que na possibilidade (**P2**) se verifica $|x-y| \geq \frac{1}{2}$ $\quad (*)$.

Inicialmente vamos mostrar que não podemos ter

$$|x-z| + |z-y| < \frac{1}{2}$$

De fato, se isto fosse possível teriamos (utilizando a desigualdade triangular)

$$|x-y| \leq |x-z| + |z-y| < \frac{1}{2}$$

contradizendo $(*)$. Sendo assim só pode ser $|x-z| + |z-y| \geq \frac{1}{2}$ o que, juntamente com $(*)$, nos fornece a desigualdade (23).

(**P3**) Neste caso a desigualdade (22) reduz-se a

$$|x-y| \leq 1-|x-z|+|z-y|$$

Vamos mostrar a desigualdade equivalente

$$|x-y|+|x-z|-|z-y| \leq 1 \tag{24}$$

Pois bem, pela desigualdade triangular podemos escrever

$$|x-z| \leq |x-y|+|y-z| \iff |x-z|-|z-y| \leq |x-y|$$

somando $|x-y|$ a ambos os membros desta última desigualdade, obtemos

$$|x-y|+|x-z|-|z-y| \leq |x-y|+|x-y| \iff |x-y|+|x-z|-|z-y| \leq 2|x-y| \leq 1.$$

Na última desigualdade usamos o fato de que na possibilidade (**P3**) se verifica $|x-y| \leq \frac{1}{2}$.

(**P4**) Neste caso a desigualdade (22) reduz-se a

$$1-|x-y| \leq 1-|x-z|+|z-y|$$

Esta desigualdade é equivalente à seguinte

$$|x-z| \leq |x-y|+|y-z|$$

a qual é sempre verdadeira por tratar-se da desigualdade triangular para números reais.

(**P5**) Neste caso a desigualdade (22) reduz-se a

$$|x-y| \leq |x-z|+1-|z-y|$$

Vamos mostrar a desigualdade equivalente

$$|x-y|+|z-y|-|x-z| \leq 1 \tag{25}$$

Pois bem, pela desigualdade triangular podemos escrever

$$|z-y| \leq |z-x|+|x-y| \iff |z-y|-|x-z| \leq |x-y|$$

somando $|x-y|$ a ambos os membros desta última desigualdade, obtemos

$$|x-y|+|z-y|-|x-z| \leq |x-y|+|x-y| \iff |x-y|+|z-y|-|x-z| \leq 2|x-y| \leq 1.$$

Na última desigualdade usamos o fato de que na possibilidade (**P5**) se verifica $|x-y| \leq \frac{1}{2}$.

(**P6**) Neste caso a desigualdade (22) reduz-se a

$$1-|x-y| \leq |x-z|+1-|z-y|$$

Esta desigualdade é equivalente à seguinte

$$|z-y| \leq |z-x|+|x-y|$$

a qual é sempre verdadeira por tratar-se da desigualdade triangular para números reais.

(**P7**) Neste caso a desigualdade (22) reduz-se a

$$|x-y| \leq 1-|x-z|+1-|z-y|$$

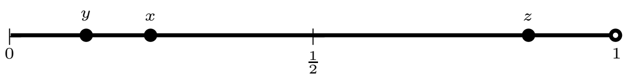
Vamos mostrar a desigualdade equivalente

$$|x-y|+|x-z|+|z-y| \leq 2 \tag{26}$$

Na possibilidade (**P7**) se verifica:

$$\textbf{(i)}\ \ |x-y| \leq \frac{1}{2} \qquad \textbf{(ii)}\ \ |x-z| \geq \frac{1}{2} \qquad \textbf{(iii)}\ \ |z-y| \geq \frac{1}{2}.$$

Se dividirmos o intervalo $[\,0,\,1[$ ao meio; por (**ii**) vemos que x e z não podem figurar na mesma metade do intervalo. Por (**iii**) acontece o mesmo com respeito a z e y. Devemos ter a seguinte configuração:



A partir de (26) podemos escrever $f(x,\,y,\,z)=|x-y|+|x-z|+|z-y|$. Vamos mostrar que o *maior* valor que esta função pode assumir não excede 2. Tendo em conta a figura anterior temos que,

$$|x-y|=x-y, \qquad |x-z|=z-x, \qquad |z-y|=z-y$$

Não faz mal supor x à direita de y. Logo, $f(x,\,y,\,z)=2(z-y)$, então,

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \leq z < 1 \end{cases} \ \Rightarrow\ -\frac{1}{2} \leq -y \leq 0 \ \ \Rightarrow\ \ 0 \leq z-y < 1 \ \ \Rightarrow\ \ 0 \leq 2(z-y) < 2.$$

Daqui inferimos que $f(x,\,y,\,z)=|x-y|+|x-z|+|z-y|=2(z-y)<2$, donde concluimos que a desigualdade (26) será sempre verdadeira.

(**P8**) Neste caso a desigualdade (22) reduz-se a

$$1-|x-y| \leq 1-|x-z|+1-|z-y| \tag{27}$$

Esta alternativa (possibilidade) só pode ocorrer se tivermos simultâneamente,

$$\textbf{(i)}\ \ |x-y| \geq \frac{1}{2} \qquad \textbf{(ii)}\ \ |x-z| \geq \frac{1}{2} \qquad \textbf{(iii)}\ \ |z-y| \geq \frac{1}{2}.$$

Vamos mostrar que, dados três pontos x, y e z arbitrários, estas três possibilidades jamais ocorrem simultâneamente e, por conseguinte, a possibilidade (27) não pode ocorrer (pode ser ignorada, descartada).

Com efeito, dados três pontos x, y e z arbitrários existem as seguintes possibilidades:

a) $x=y=z$ **b)** $x=y\neq z$ **c)** $x=z\neq y$ **d)** $y=z\neq x$ **e)** $x\neq y\neq z$.

As possibilidades **a)** e **b)** contradizem **(i)**, a possibilidade **c)** contradiz **(ii)** e a possibilidade **d)** contradiz **(iii)**. Portanto, só nos resta considerar a possibilidade **e)**, em que os três pontos são distintos. Ora, como é impossível situarmos (ou escolhermos) três pontos distintos, no intervalo $[\,0,\,1\,[$, satisfazendo **(i)**, **(ii)** e **(iii)** simultâneamente* segue que (27) jamais ocorre. ■

*Observe que estas três condições nos dizem que os três pontos devem estar – simultâneamente – em metades opostas do intervalo unitário o que é, evidentemente, impossível.

Referências

[1] Domingues, Higino Hugueros. *Espaços Métricos e Introdução à Topologia*. São Paulo: Atual, 1982.

[2] Lima, Elon Lages. *Espaços Métricos*. Rio de Janeiro: IMPA - CNPq,1993.

[3] Silva, Gentil Lopes. *Espaços Métricos (Comentado)*. www.dmat.ufrr.br/∼ gentil, 2010.

[4] Lima, Elon Lages. et alii *A Matemática do Ensino Médio* Vol. 1. Rio de Janeiro:SBM, 1997.

[5] Scientific American − Edição Especial − *As diferentes faces do infinito* Ediouro, São Paulo, SP.

[6] Silva, Gentil Lopes. *Os Números Azuis*, www.dmat.ufrr.br/∼ gentil, 2008.

[7] Silva, Gentil Lopes. *Topologia Quântica* (www.dmat.ufrr.br/∼ gentil), 2008

[8] Silva, Gentil Lopes.*O Mito das Ambigüidades nas Representações Decimais* www.dmat.ufrr.br/∼ gentil

[9] Silva, Gentil Lopes. `Números Hipercomplexos`−$2D$ `( Uma Nova Generalização dos Números Reais )` www.dmat.ufrr.br/∼ gentil, 2007

[10] Halmos, Paul R. *Teoria ingênua dos conjuntos*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2001.

[11] Brolezzi, Antonio Carlos/Monteiro, Martha Salerno, *Matemática: Números para quê?* Universidade de São Paulo, Publicação eletrônica.

[12] Carmo, Manfredo Perdigão do, et alii, *Trigonometria/Números complexos*. Rio de Janeiro − IMPA/VITAE, 1992.

[13] Ávila, Geraldo S. Souza, *Introdução à Análise Matemática*. São Paulo − Editora Edgard Blücher, 1993.

Amaringo-Ayahuasca

"O poeta inicia sua prece ponteando em cordas e lamento, escrevendo seus novos mandamentos na fronteira de um mundo alucinado. . . "
`(canção agalopada/ Zé Ramalho)`

"Eu agradeço os primores que eu recebo eu agradeço e só posso agradecer. . . " `( Mário/D. Deolinda )`